Numeriska serier

Andreas Rejbrand, april 2014

1 Inledning

Författarens erfarenhet säger att momentet med *numeriska serier* är ganska svårt för många studenter i inledande matematikkurser på högskolenivå. Det här dokumentet är tänk att fungera som extra hjälp för dessa studenter.

Vi förklarar här i stort sett hela teorin med fokus på vad saker *betyder* och hur de *hänger ihop*. Vi har som mål att inte bara vara tydliga, utan även *övertydliga*.

Vi ger nästan inga av bevisen för de satser vi nämner. I stället fokuserar vi på det som varje student måste *kunna*. Kom ihåg att dokumentet är ett *supplement* till den vanliga kurslitteraturen för de studenter som har *svårt* med summor och serier.

Nästan alla avsnitt i dokumentet är viktiga, och man bör inte börja med nästa avsnitt innan man helt förstått det aktuella avsnittet. Enda undantaget är avsnitt 3 som handlar om gränsvärden, i vilket vi diskuterar de precisa formella definitionerna av gränsvärdesbegreppen. Det här avsnittet kan man möjligtvis skippa om man nöjer sig med att förstå de ”intuitiva” definitionerna av gränsvärdesbegreppen, eller om man redan är förtrogen med ”$\epsilon\delta$-definitionerna”.

(Däremot vore det naturligtvis *mycket bra* om *alla* studenter tog till sig de riktiga definitionerna av gränsvärden. Det är onekligen lättare att arbeta med matematiska objekt om man vet vad de betyder…)

Dokumentet innehåller övningsuppgifter. Somliga av dessa är markerade med en eller två asterisker. En asterisk innebär att uppgiften är lite ”svårare” och lite mindre ”viktig” för den grundläggande förståelsen av materialet. Samtliga läsare rekommenderas att göra alla *omarkerade* övningar.

2 Logik

Innan vi ger oss i kast med summor och serier påminner vi om ett logiskt faktum, nämligen det att ett påstående i form av en implikation

$$P \qquad \Longrightarrow \qquad Q$$

är ekvivalent med sin *kontrapositiva* utsaga (symbolen $\neg$ betyder ”inte”)

$$\neg Q \qquad \Longrightarrow \qquad \neg P.$$

Detta är egentligen självklart, vilket troligtvis läsaren kommer att hålla med om efter ett exempel. Med P: ”Det regnar” och Q: ”Gatan blir blöt” lyder den ursprungliga implikationen

”*Om* det regnar, *så* blir gatan blöt.” (1)

Den kontrapositiva implikationen är då

”*Om* gatan inte blir blöt, *så* regnar det inte.” (2)

Det är klart att dessa två påståenden är ekvivalenta, d.v.s. medför varandra. Om man vet att (1) är sann, så vet man också att (2) är sann. För om gatan inte blir blöt så *kan* det inte regna, ty om det skulle regna, ja, då *skulle* ju gatan bli blöt (enl. 1)! Omvänt, om man vet att (2) är sann, så kan man dra slutsatsen (1) med ett helt analogt resonemang.

Matematik går till stor del ut på att bevisa satser. Ofta är dessa formulerade som implikationer. Då skall man alltså visa att $P \Rightarrow Q$. I många sådana fall väljer man i stället att bevisa att $\neg Q$ medför $\neg P$, om det känns enklare. Eftersom detta kontrapositiva påstående är ekvivalent med det ursprungliga påståendet har man har då också bevisat $P \Rightarrow Q$, d.v.s. man har gjort det man skulle göra.

Vi ger ett praktiskt exempel:

Exempel

Låt A vara ett icke-negativt tal. Visa att *om* A är irrationellt, *så* är $\sqrt{A}$ också irrationellt.

Bevis. Vi visar den kontrapositiva implikationen. Antag därför att $\sqrt{A}$ är rationellt, så att $\sqrt{A} = \frac{p}{q}$ för ett par heltal p och $q \neq 0$. Då är $A = \left(\sqrt{A}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$ också rationellt. ■

3 Gränsvärde – repetition av vad begreppet innebär (*)

Studenter av numeriska serier har i tidigare matematikstudier redan bekantat sig med gränsvärdes-begreppet, som faktiskt ligger till grund för nästan all matematisk analys. (Bland annat är begreppen *derivata* och *integral* omöjliga att formulera utan gränsvärden.) Det finns flera olika *typer* av gräns-värden, men den grundläggande idén är densamma i samtliga dessa fall.

3.1 Exempel

I det här exemplet använder vi gränsvärdet ”$\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$” för att resonera oss fram till den rik-tiga *definitionen* av begreppet gränsvärde av typen ”$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$” (där f är en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Vi vill alltså hitta en *precis formulering* av just det här gränsvärdesbegreppet; formuleringen skall svara mot vår intuitiva idé om vad ett ”gränsvärde” (av den här typen) är för något. Poängen är att få läsaren att se hur naturlig den formella definitionen är, och att inse att den inte kan förenklas.

Naturligtvis kan man inte ”bevisa” en definition. Det vi gör är bara att vi försöker hitta en precis for-mulering som svarar mot vår intuitiva idé om vad ett ”gränsvärde” är för något. Och sedan när vi hittat en lämplig sådan formulering, då använder vi denna som definition av begreppet (och vi kan – om vi så vill – glömma bort allt vi gjorde innan vi fastställde definitionen).

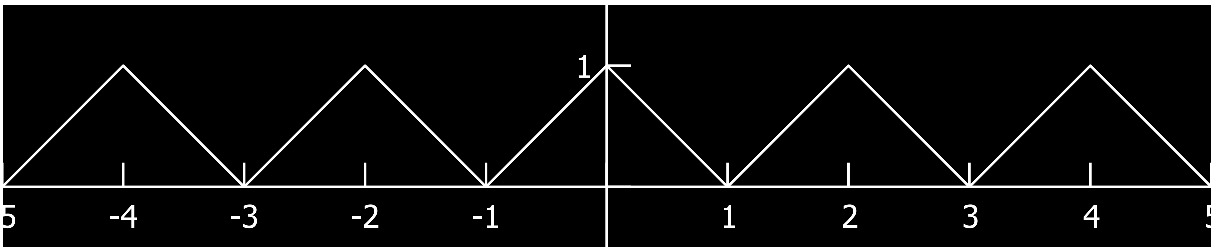
Vi brukar som nämnt säga att $\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$. Vad menar vi egentligen med det? En kortfattad förklaring är att $\frac{1}{x^2}$ ”närmar sig” eller ”går mot” eller ”kommer närmare och närmare” talet 0 då x ”går mot” oändligheten eller ”blir större och större”, men *precis* vad betyder det?

En konkret egenskap som uttrycket $\frac{1}{x^2}$ har som motiverar gränsvärdet är att vi kan få $\frac{1}{x^2}$ hur litet som helst (d.v.s. hur nära 0 som helst) bara genom att välja x ”rätt”. Till exempel kan vi erhålla funktions-värdet 0.01 genom att stoppa in $x = 10$. Det här är en egenskap vi vill ska gälla för alla funktioner f värda att uppfylla ”$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$”.

Försök 1. Kanske kan vi definiera ”$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$” som ”till varje tal ϵ (hur litet som helst!) finns ett x sådant att $f(x) = \epsilon$”? Nej, för i sådana fall gäller *inte* att ”$\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$” t.ex. ty $\frac{1}{x^2} = -3$ inte gäller för något x. Inte ens den konstanta funktionen $f(x) = 0$ går mot 0 enligt den här definitionen. Å andra sidan har vi ”$2x + 1 \to 0$ då $x \to \infty$” vilket vi verkligen inte vill. Vår definition är alltså mycket olämplig (faktum är att vår definition i stället beskriver de *surjektiva* funktionerna – en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är ju surjektiv om den kan ge ifrån sig *varje* reellt tal). Ett problem med vår definition verkar vara att den helt missar att ϵ är just ett *litet* tal – f behöver inte alls ge ifrån sig stora tal, men den måste kunna ge ifrån sig ”tillräckligt små” tal, d.v.s. tal tillräckligt nära 0. [Eller tänk så här: Vår ”definition” nämner ju varken 0:an [i ”$f(x) \to 0$”] eller oändligheten [i ”$x \to \infty$”] och skulle enligt vårt ”resonemang” lika gärna kunna beskriva situationen ”$f(x) \to 7$ då $x \to 32$”.]

Försök 2. Vi säger nu att ”$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$” betyder ”till varje $\epsilon > 0$ finns ett tal x sådant att $|f(x)| < \epsilon$”. Att $|f(x)| < \epsilon$ betyder att $-\epsilon < f(x) < \epsilon$, d.v.s. $f(x)$ är inom en radie ϵ från 0. Vi säger alltså att vi kan få $f(x)$ hur nära 0 som helst (närmare än vilket givet avstånd som helst). Nu gäller lyckligtvis att ”$\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$”, men inte t.ex. ”$2 + x^2 \to 0$ då $x \to \infty$” (pröva $\epsilon = 1$). Så långt är allt bra. Men tyvärr har vi att ”$2x + 1 \to 0$ då $x \to \infty$” (t.ex. med $\epsilon = 0.1$ duger $x = -1/2$). Problemet med vår nya definition är att den helt missar det faktum att funktionen skall närma sig noll *när x går mot oändligheten*. Vi gör ännu ett nytt försök:

Försök 3. Vi prövar ”till varje $\epsilon > 0$ och $\omega \in \mathbb{R}$ finns ett tal $x > \omega$ sådant att $|f(x)| < \epsilon$”. Vi säger med andra ord att oavsett hur långt åt höger på tallinjen man än tittar (hur stort ω man än väljer) så finns det en punkt till höger för vilken funktionsvärdet är inom ϵ från 0. Kan det här vara den precisa formulering som vi söker? Nej, faktiskt inte. Betrakta den funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som har följande graf:



Det är klart att det till varje $\epsilon > 0$ och $\omega \in \mathbb{R}$ finns ett tal $x > \omega$ sådant att rent av $f(x) = 0$ (hur långt åt höger vi än tittar finns det ju en punkt till höger där funktionen är exakt noll). Alltså har vi ”$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$” enligt vår definition, vilket dessvärre krockar med vår intuitiva uppfattning om vad ett gränsvärde är – för det är ju synd att säga att $f(x)$ ”närmar sig” 0 när x ökar. (Det vore lika rimligt att säga att den närmar sig 1. Men enligt vår gränsvärdesintuition så närmar den sig ju *inget* tal alls eftersom den för all framtid hoppar upp och ner mellan 0 och 1.)

Kanske kan vi helt enkelt kräva att $|f(x)| < \epsilon$ inte bara för *något* $x > \omega$, utan för *alla* x till höger om ω på tallinjen? Vi prövar!

Försök 4. Vi säger att ”$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$” betyder ”för varje $\epsilon > 0$ och $\omega \in \mathbb{R}$ gäller att$|f(x)| < \epsilon$ för varje $x > \omega$”. Men ack så tokigt det blev nu! Nu har vi inte ens ”$\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$” ty för $\epsilon = 0.1$ och $\omega = 1$ gäller ju *inte* att ”$\frac{1}{x^2} < 0.1$ för varje $x > 1$”. Hur löser vi detta? Jo, det viktiga är ju att $f(x)$ är tillräckligt litet från *någon* (tillräckligt stor) punkt ω på tallinjen och framåt, inte från *varje* punkt ω och framåt. Vi prövar alltså:

Försök 5. Vi säger att ”$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$” betyder ”för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\omega \in \mathbb{R}$ sådant att $|f(x)| < \epsilon$ för varje $x > \omega$”. Detta är den etablerade gränsvärdesdefinitionen. Läsaren kan själv verifiera att den i samtliga fall svarar mot vår intuitiva uppfattning av gränsvärdesbegreppet. Till exempel, om $f(x) = \frac{1}{x^2}$ och vi väljer $\epsilon = 0.01$ så fungerar $\omega = 10$ ty

$$\frac{1}{x^2} < 0.01, \qquad \forall x > 10.$$

(Naturligtvis fungerar också varje tal större än 10 som ω.)

Så… ”$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$” betyder alltså att det för varje ”feltolerans” $\epsilon > 0$ – hur liten som helst! – garanterat finns ett tal $\omega > 0$ sådant att $f(x)$ är inom ϵ från 0 för alla x till höger om ω. Dels betyder detta att $f(x)$ kan anta hur små värden som helst (och hur långt åt höger som helst), dels vet man att $f(x)$ ”håller sig litet” från och med denna punkt på tallinjen. Så det finns ett ω_1 sådant att $|f(x)| < 0.1$ överallt till höger om ω_1, ett ω_2 sådant att $|f(x)| < 0.01$ överallt till höger om ω_2, ett ω_3 sådant att… Det är lätt att inse(hur?) att vi alltid kan välja talen ω_k sådant att $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \cdots$. Detta är precis vår intuitiva bild av ett gränsvärde!

Övningar

1. Besvara frågan!
2. *Det finns en enda funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med den egenskap som vi betraktade i ”Försök 4” ovan. Vilken? (Ledning: Välj ett fixt $\epsilon > 0$ och notera att utsagan ”$|f(x)| < \epsilon,\ \forall x > \omega$” gäller för *varje* $\omega \in \mathbb{R}$. Dra en slutsats om f. Beakta sedan att denna slutsats gäller för *varje* val av $\epsilon > 0$.)
3. **Ge om möjligt exempel på en funktion $f: \mathbb{R} \to]0, \infty[$ sådan att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ med den egenskapen att restriktionen av f till $[A, \infty[$ *inte* är avtagande för något $A \in \mathbb{R}$.
4. **Ge om möjligt exempel på en funktion $f: \mathbb{R} \to]0, \infty[$ sådan att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ med den egenskapen att värdemängden V_f *inte* innehåller något intervall på formen $]0, a[$.

Vi kan direkt införa ett något mer allmänt gränsvärdesbegrepp:

Definition. Låt $c \in \mathbb{R}$. Vi säger att $f(x) \to c$ då $x \to \infty$ omm det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ sådant att $|f(x) - c| < \epsilon$ för varje $x > \omega$.

Detta svarar mot vår intuitiva uppfattning om att $f(x)$ ”närmar sig” c när x blir större och större; $|f(x) - c|$ är ju avståndet mellan $f(x)$ och c på tallinjen. Så för varje ”tolerans” ϵ du kan föreställa dig – hur liten som helst, kanske 10^{-100} – finns det garanterat en punkt $\omega > 0$ sådan att ”felet” $|f(x) - c|$ är mindre än ϵ överallt till höger om ω. Och om du minskar ϵ behöver du i allmänhet öka ω.

3.2 Andra typer av gränsvärden

Läsaren vet att det finns andra typer av gränsvärden. T.ex. har vi ju att $\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$. Läsaren bör nu vara så pass mogen att han ser rimligheten i (och nödvändigheten av) följande precisa definition:

Definition. Låt $a, x_0 \in \mathbb{R}$. Vi säger att $f(x) \to a$ då $x \to x_0$ omm det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - a| < \epsilon$ för varje $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \setminus \{0\}$.

$f(x) \to 1$ då $x \to 0$ betyder t.ex. att det för varje ”tolerans” $\epsilon > 0$ garanterat finns en ”radie” $\delta > 0$ sådan att ”felet” $|f(x) - 1|$ är mindre än ϵ för varje x inom en radie av δ från 0 (förutom just i punkten 0, där vad som helst är tillåtet). T.ex. finns det en radie $\delta > 0$ sådan att $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < 0.01$ för varje $x \in \,]-\delta, \delta[$. Och detta gäller för varje tolerans ϵ du kan tänka dig. I allmänhet behöver man förstås välja δ mindre om man väljer ϵ mindre.

Det finns ytterligare andra typer av gränsvärden, t.ex.

Definition. Vi säger att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ omm det för varje $\omega_1 > 0$ finns ett $\omega_2 > 0$ sådant att $f(x) > \omega_1$ för varje $\omega_2 > 0$.

T.ex. kan läsaren verifiera att $1 + 2x \to \infty$ då $x \to \infty$.

Övningar

1. Ge den precisa innebörden av påståendet ”$f(x) \to -\infty$ då $x \to \infty$”.
2. Vad betyder ”$f(x) \to \infty$ då $x \to a$” där $a \in \mathbb{R}$?
3. Vad menar man med ”$f(x) \to -\infty$ då $x \to a$” där $a \in \mathbb{R}$?
4. Definiera ”$f(x) \to a$ då $x \to -\infty$” där $a \in \mathbb{R}$.
5. Definiera ”$f(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$”.
6. Definiera ”$f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$”.
7. *Ge exempel (t.ex. genom att skissa en representativ del av grafen) på en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och som *inte* är växande på *något* intervall $[a, \infty[$.

3.3 Gränsvärden av *följder*

Vi kan också betrakta gränsvärden för *följder* av tal, d.v.s. för funktioner $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Om vi t.ex. har en sådan följd $a_0, a_1, a_2, \ldots$ så betyder

$$a_n \to a$$

då $n \to \infty$ att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att

$$|a_n - a| < \epsilon, \qquad \forall n > N.$$

På motsvarande sätt betyder

$$a_n \to \infty$$

då $n \to \infty$ att det för varje $\omega > 0$ finns ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att

$$a_n > \omega, \qquad \forall n > N.$$

Övning

1. Definiera ”$a_n \to -\infty$ då $n \to \infty$”.

4 Notation för gränsvärden

Om $f(x) = x^2 + 1$ så vi vet att $f(x) \to 5$ då $x \to 2$. Talet 5 kallas därför för *gränsvärdet* av $f(x)$ när variabeln x närmar sig 2. För att ange ett gränsvärde måste man således ange dels ett uttryck, dels vad den oberoende variabeln närmar sig (ett reellt tal, $+\infty$ eller $-\infty$).

Det är praktiskt att införa en *symbol* för gränsvärdet av ett uttryck när variabeln går mot ett visst värde. Detta är den s.k. *limessymbolen*. Till exempel betyder

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

gränsvärdet av $f(x)$ när $x \to a$. Om t.ex. $f(x) = x^2 + 1$ så vet vi ju att $f(x) \to 5$ då $x \to 2$ varför vi har

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 1) = 5,$$

d.v.s. symbolen $\lim_{x\to 2}(x^2 + 1)$ betyder 5, d.v.s. symbolen $\lim_{x\to 2}(x^2 + 1)$ står för talet 5, d.v.s. symbolen $\lim_{x\to 2}(x^2 + 1)$ är exakt samma sak som talet 5.

Några mycket vanliga notationsfel

Ett mycket vanligt fel är att studenter blandar ihop notationerna. Tänk på exemplet

$$\frac{1}{x} \to 0, \qquad x \to \infty.$$

Det är ju klart att värdet av uttrycket $1/x$ går mot 0 då x går mot oändligheten. Däremot ser man ibland studenter skriva

$$\frac{1}{x} = 0, \qquad x \to \infty$$

vilket är helt fel. Likhetstecknet betyder ju att två objekt är identiska, och det är ju knappast så att $\frac{1}{x}$ är lika med noll. Inte för *varje* x (som i en identitet: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$), och inte ens för *något* x (som i en ekvation som skall lösas: $2x^2 + 5x + 2 = 7$). Och även om ekvationen *skulle* vara sann för något x, så är ju det inte relevant. Det vi vill säga är ju just att $1/x$ *går mot* 0 då $x \to \infty$ (d.v.s. ”för varje $\epsilon > 0$ finns det ett $\omega > 0$ sådant att…”), och då skriver man ”$1/x \to 0$ då $x \to \infty$”.

Vi har alltså gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ett ännu vanligare fel är att studenter skriver

$$\text{”}\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \to 0\text{”}$$

vilket är fullständigt barockt! ”$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$” är ju en symbol som betyder exakt gränsvärdet av $\frac{1}{x}$ när $x \to \infty$, d.v.s. det är en symbol för talet 0. Och $0 = 0$, med likhetstecken. (I och för sig är det också sant att ”$0 \to 0$”, men det är svagare och en väldigt onaturlig formulering.) *Gränsvärdet* ***är*** *noll*.

[Om man skriver felaktigt som ovan så handlar det i stället om *ett gränsvärde av ett gränsvärde*. Om t.ex. $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{y}$ och

$$g(y) \coloneqq \lim_{x\to 2} f(x,y) = \lim_{x\to 2}\left(x^2 + \frac{1}{y}\right) = 4 + \frac{1}{y},$$

så är

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to 2} f(x,y) = \lim_{y\to\infty}\left(4 + \frac{1}{y}\right) = 4$$

och det är meningsfullt att skriva

$$\text{"}\lim_{x\to 2} f(x,y) \to 4, \qquad y \to \infty\text{"}.$$

Men sådana ”dubbla” gränsvärden förekommer tämligen sällan i matematiska grundkurser, och av de hundratals exempel på skrivsättet ”$\lim_{x\to a} f(x) \to b$” undertecknad sett studenter använda på tentamina har samtliga varit felaktiga. Studenten har i samtliga fall i stället menat ”$\lim_{x\to a} f(x) = b$”, eller, förstås, ”$f(x) \to b$ då $x \to a$”.]

Ett gränsvärde ***är****; ett uttryck* ***går mot****.*

Ett tredje notationsfel som ofta förekommer är

$$\text{"}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad \text{då} \quad x \to \infty\text{"}$$

som också är tokigt. I ord är ju detta

”gränsvärdet av $\frac{1}{x}$ när x går mot oändligheten är lika med 0 då x går mot oändligheten”

och den snällaste tolkningen av detta är att det är ”kaka på kaka”. (En mindre snäll tolkning är att det är ”obegripligt” eftersom vi egentligen bara sagt vad ”$x \to \infty$” betyder om det står tillsammans med något på formen ”$f(x) \to a$”.)

Exempel

Det finns alltså olika notationer som kan användas för gränsvärden. Ofta kan man välja mellan den ena och den andra.

Beräkna $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$.

Lösning 1: Vi har

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2}.$$

Lösning 2: Vi har

$$\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} = \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{3}{2} \to \frac{3}{2}$$

då $x \to 0$.

Det säger sig självt att den andra notationen är bättre i nästan samtliga fall då man använder många led av likheter i lösningen – det är helt enkelt onödigt att släpa med ”lim” framför varje led. Dels blir det mycket att skriva, dels blir den resulterande texten tyngre att läsa.

Ett mycket vanligt fel

Ett annat mycket vanligt förekommande fel som nya studenter begår är att de skriver

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} = \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{[Fel!!].}$$

Detta är förstås felaktigt, eftersom varken den första eller den andra likheten är sann: Medan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$$

är ett rent *tal* (närmare bestämt talet $3/2$) så är ju högerledet

$$\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{3}{2}$$

ett uttryck i x. Egentligen står det alltså

$$\frac{3}{2} = \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{3}{2}$$

vilket inte är vad studenten menar. (Den här (tokiga) utsagan är definitivt inte en identitet, utan en ekvation som råkar ha den enda lösningen $0.4633\ldots$ som inte har något alls med uppgiften att göra.)

5 Summor

Läsaren är förstås bekant med summationssymbolen:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k \coloneqq a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Till exempel har vi

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{5269}{3600}.$$

Det här med summor är alltså inget konstigt. Vi har en given *ändlig* följd a_k av tal, t.ex.

$$1, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{25},$$

och vi beräknar deras vanliga summa. Vi vet ju sedan lågstadiet vad operatorn "+" betyder när den står mellan *två* tal, så varje (ändlig) summa kan beräknas entydigt med upprepad sådan addition.

Sedan tidigare matematikstudier känner läsaren igen två speciella sorters talföljder. Om *differensen* i följden mellan varje element och föregående är konstant, kallas följden *aritmetisk*. Om i stället *kvoten* är konstant, kallas följden *geometrisk*. Av följderna nedan är t.ex. den första aritmetisk (med differensen 1) och den andra geometrisk (med kvoten $-\frac{1}{2}$):

$$\begin{array}{lllllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots, & 100 \\ 1, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{8}, & \frac{1}{16}, & \dots, & \frac{1}{1024}. \end{array}$$

Vår första exempelföljd $(1/k^2)_{k=1}^{5}$ är å andra sidan *varken* aritmetisk eller geometrisk. Läsaren kan förstås speciella formler för *summan* av elementen i en aritmetisk eller geometrisk följd, och finner därför med största möjliga enkelhet att den aritmetiska summan har värdet

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 100 = 100 \cdot \frac{1 + 100}{2} = 5050$$

medan den geometriska summan har värdet

$$\sum_{k=0}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{683}{1024}.$$

Att sista termen svarar mot $k = 10$ i geometriska fallet är klart eftersom $2^{10} = 1024$. Läsaren är också naturligtvis mer än väl medveten om det faktum att summan $\sum_{k=m}^{n} a_k$ har precis $n - m + 1$ termer. Till exempel har vi ju

$$\sum_{k=5}^{7} k^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2$$

med $7 - 5 + 1 = 3$ termer.

Innan vi fortsätter måste vi introducera ett nytt, litet, begrepp. I en summa $\sum_{k=m}^{n} a_k$ kallar vi a_k för *summanden*, d.v.s. *summanden* är det uttryck som vi summerar (jfr *integranden* i en integral). I summan

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2}$$

är alltså summanden lika med uttrycket $1/k^2$. Notera att summanden i allmänhet beror på sitt index k, medan själva *summan*

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2} = \frac{5269}{3600}$$

är ett rent tal. Naturligtvis *kan* summanden vara oberoende av sitt index (den är då en *konstant* funktion av sitt index), som i exemplet $a_k = 1$ (för varje k) som ger

$$\sum_{k=1}^{10} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10.$$

6 Räkna med summor

Några enkla räkneregler gäller för summor. Först har vi uppdelning:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{\ell} a_k + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k$$

om ℓ är ett tal mellan m och n. Till exempel är ju

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=4}^{10} a_k$$

eftersom

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \\ = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}.$$

Sedan har vi linjäritet:

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$
$$\sum_{k=m}^{n} c a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Som exempel ger vi

$$\sum_{k=1}^{3} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=1}^{3} b_k$$

eftersom

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3$$

samt

$$\sum_{k=1}^{3} 7a_k = 7 \sum_{k=1}^{3} a_k$$

eftersom

$$7a_1 + 7a_2 + 7a_3 = 7(a_1 + a_2 + a_3).$$

7 Vad menas med en ”serie”?

Nu kommer vi till serierna.

En serie säges ofta vara en ”oändlig summa”, vilket emellertid inte duger som definition. Vi vet som bekant vad operatorn ”$+$” betyder när den används mellan *två* tal, och därför kan vi beräkna vilken *ändlig* summa som helst, genom att upprepade gånger addera två tal till varandra. Men det är inte på något sätt uppenbart vad som menas med ”summan av en *oändlig* mängd tal”. Naturligtvis kan man göra en *definition* och säga ”med summan av en oändlig mängd tal menas…”. I det här avsnittet kommer vi göra en definition och säga vad som menas med ”summan” av de oändligt många elementen i en oändlig *följd* av tal.

Vi ger ett exempel.

Betrakta vår ”favoritföljd” (a_k) definierad av $a_k = 1/k^2$, men nu med *oändligt* många element ($k = 1, 2, \dots$), d.v.s.

$$\frac{1}{1}, \qquad \frac{1}{2^2}, \qquad \frac{1}{3^2}, \qquad \frac{1}{4^2}, \qquad \frac{1}{5^2}, \qquad \frac{1}{6^2}, \qquad \dots$$

I decimalform har vi

$$1, \qquad 0.25, \qquad 0.11\dots, \qquad 0.0625, \qquad 0.04, \qquad 0.0277\dots, \qquad \dots\ .$$

Det är klart att

$$\frac{1}{k^2} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

(Termerna går dessutom mot noll ganska ”snabbt”, eftersom ”upphöjt till två” i nämnaren växer ”väldigt snabbt”.)

Vi inför nu de s.k. *delsummorna*

$$\begin{aligned}
S_1 &\coloneqq \frac{1}{1} \\
S_2 &\coloneqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} \\
S_3 &\coloneqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \\
S_4 &\coloneqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \\
S_5 &\coloneqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(dessa summor är ju ändliga och därmed ”helt vanliga” summor) d.v.s.

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Vi har med andra ord *två* följder att tänka på: dels den ursprungliga talföljden a_k, dels följden S_n av delsummor. **Det är extremt viktigt att man inte blandar ihop dessa begrepp!** Låt oss titta på följden av delsummor i decimalform. Vi har

$$\begin{aligned}
&S_1 = 1\\
&S_2 = 1.25\\
&S_3 = 1.3611\ldots\\
&S_4 = 1.423611\ldots\\
&S_5 = 1.463611\ldots\\
&S_6 = 1.491388\ldots\\
&\vdots\\
&S_{10000} = 1.64483407185\ldots\\
&S_{10001} = 1.64483408185\ldots\\
&S_{10002} = 1.64483409184\ldots\\
&\vdots\\
&S_{100000} = 1.6449240669\ldots\\
&\vdots\\
&S_{1000000} = 1.64493306685\ldots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

I själva verket kan man visa att

$$S_n \to \frac{\pi^2}{6} (= 1.64493406685\ldots)$$

när $n \to \infty$. Vi *definierar* nu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \left(= \frac{\pi^2}{6} \right).$$

I allmänhet gör vi följande analoga definition:

Definition. Om $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ är en följd av tal så är *serien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

ifall gränsvärdet existerar ändligt. Då kallas serien *konvergent*; annars är den *divergent* (och symbolen svarar inte mot något numeriskt värde).

Vi inför alltså *symbolen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

för gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ av följden $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_n$ av delsummor. Ibland skriver vi också

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

som om det vore en ”oändlig” summa, men det är viktigt att komma ihåg att det objekt som avses (både i västerledet och i högerledet) är just gränsvärdet av följden av delsummor, ifall det existerar.

Om följden av delsummor går mot oändligheten (och *bara* då, förstås) tillåter man sig ibland att skriva ”$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$”.

Exempel

Vi har nyligen sett att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8 Summanden måste gå mot noll

Det är förstås mycket möjligt att en serie är divergent, d.v.s. att följden av delsummor *inte* har ett ändligt gränsvärde. (Antingen går då delsommorna mot oändligheten, eller så saknas gränsvärde.)

8.1 Exempel 1

Ett trivialt exempel är följden $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ där $a_k = 1$ för varje k, d.v.s. följden

$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad \ldots\,.$$

Här är följden av delsummor

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots$$

så att

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Därför existerar inte serien $\sum_{k=0}^{\infty} 1$; den är divergent (och eventuellt skriver man ”$\sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$” eftersom följden av delsummorna går mot oändligheten). Och det är ju klart, att om man tar en massa 1:or plus varandra, så kan man ju få precis hur stora tal som helst, bara man tar med tillräckligt många termer. Följden av delsummor går alltså mot oändligheten.

8.2 Exempel 2

Även serien $\sum_{k=0}^{\infty} k$ är förstås divergent, för här är ju följden

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

så att följden av delsummorna är

$$0, \quad 1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad \ldots$$

vilken återigen går mot oändligheten.

8.3 Exempel 3

Som tredje exempel, betrakta $a_k = (-1)^k$, d.v.s. följden

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad \dots .$$

Här är följden av delsummor

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad \dots$$

vilken inte konvergerar mot något tal, och inte går den mot oändligheten heller. Alltså är även $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ divergent.

Övning

1. *Använd gränsvärdesdefinitionerna för att visa följande:
   a. Följden av delsummor går inte mot 0.
   b. Följden av delsummor går inte mot 1.
   c. För varje reellt tal c gäller att följden av delsummor inte går mot c.
   d. Följden av delsummor går inte mot $+\infty$ eller $-\infty$.
   e. Dra slutsatsen att följden av delsummor saknar gränsvärde.

8.4 Ett enkelt resultat

Låt oss sammanfatta vad vi har hittills:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

är alla trivialt divergenta, medan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

är konvergent. I de divergenta serierna går summanden *inte* mot noll (i första fallet går den mot 1, i andra mot ∞ och i tredje saknar den gränsvärde). Men i den konvergenta serien går summanden mot noll.

Dessa resultat bekräftar följande sats (som nästan är ”självklar”, men vi ger inget formellt bevis här):

Sats. *Om* en serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent, *så* $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

Satsen säger alltså att om en *serie* är konvergent, d.v.s. om *följden av delsummor* konvergerar, då måste *summanden* gå mot noll. Till exempel är ju $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergent (värdet är $\pi^2/6$, d.v.s. följden av delsummor går mot $\pi^2/6$), och mycket riktigt så har vi att summanden $1/k^2 \to 0$ då $k \to \infty$.

Det är främst den kontrapositiva formuleringen av satsen som är användbar:

Sats. *Om* $a_k \nrightarrow 0$ *så* är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Detta är nästan självklart. Om $a_k \nrightarrow 0$ så kan det ju t.ex. hända att a_k går mot något annat tal, t.ex. 7. Och då adderar man ju så småningom "oändligt många 7:or" med varandra, och det är klart att man då får en följd av delsummor som går mot oändligheten. Om i stället $a_k \to \infty$ adderar man större och större tal, och även då är det klart att delsummorna sticker iväg ("ännu snabbare" så småningom). Slutligen, fallet där a_k inte går mot något alls (varken ett tal eller en oändlighet) exemplifieras av följden $a_k = (-1)^k$ som vi nyss diskuterade.

Ett mycket vanligt fel

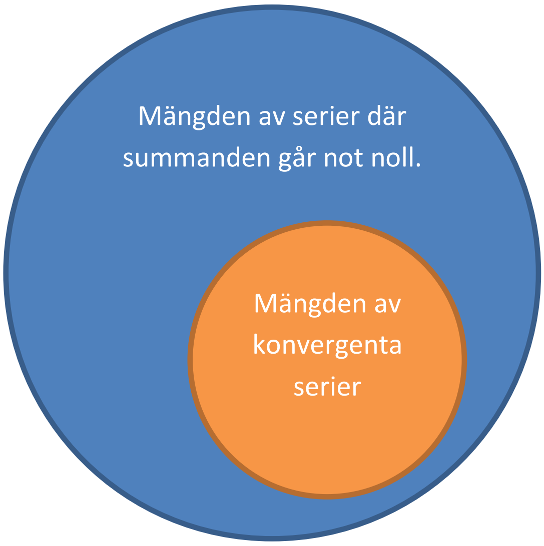
Satsen säger alltså att det är ett **nödvändigt** krav för en serie att vara konvergent, att summanden går mot noll. Alltså, om summanden *inte* går mot noll, ja, då vet man att serien är divergent. Däremot är kravet att summanden skall gå mot noll inte **tillräckligt** för seriens konvergens; en serie kan alltså mycket väl vara divergent trots att summanden går mot noll.

Vi har med andra ord **inte** följande "sats":

Falskt påstående. *Om* $a_k \to 0$ då $k \to \infty$ *så* är serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. **Fel!!**

Bara för att summanden går mot noll så måste inte serien vara konvergent!

I diagram har vi därför följande situation:



Låt oss ge ett exempel på en följd av tal som går mot noll, men där följden av delsummor ändå går mot oändligheten. Exemplet är $a_k = 1/k$. Vi har alltså följden

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \dots$$

som ger följande delsummor:

$$S_1 \coloneqq \frac{1}{1}$$
$$S_2 \coloneqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$
$$S_3 \coloneqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$
\begin{aligned}
&S_4 := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&S_5 := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

d.v.s.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Numeriskt har vi

$$
\begin{aligned}
&S_1 = 1 \\
&S_2 = 1.5 \\
&S_3 = 1.833\ldots \\
&S_4 = 2.0833\ldots \\
&S_5 = 2.2833\ldots \\
&\vdots \\
&S_{10000} = 9.78760603604\ldots \\
&\vdots \\
&S_{100000} = 12.0901461299\ldots \\
&\vdots \\
&S_{1000000} = 14.3927267229\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Det går inte snabbt, men man kan visa att

$$S_n \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Följden av delsummor går alltså mot oändligheten; man kan få hur stor delsumma man vill (”för varje ω…”), bara man tar med tillräckligt många termer (”…finns det ett $N \in \mathbb{N}$…”). Alltså är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent (trots att summanden går mot noll).

8.5 En sammanfattning av våra två exempel

Vi har alltså att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

är konvergent (följden av delsummor går mot talet $\pi^2/6$) medan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

är divergent (följden av delsummor går mot oändligheten).

Rent intuitivt är skillnaden mellan dessa två serier att medan den första seriens summand ($1/k^2$) går mot noll ”tillräckligt snabbt” för att serien skall konvergera så går den andra seriens summand ($1/k$) mot noll ”för långsamt”.

Samma fenomen gäller ju för generaliserade integraler. Jämför med $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$.

8.6 Lite om bevisen bakom våra två exempel

Hur bevisar man att $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ är divergent och att $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ är konvergent med värdet $\pi^2/6$?

Det faktum att den första divergerar och den andra konvergerar följer direkt av jämförelse med ”motsvarande” integraler (med hjälp av över- och undertrappor), vilka vi kan bestämma med primitiva funktioner. Man kan på så sätt visa att om f är en positiv och avtagande funktion för $x \geq 1$ (t.ex.) så är den generaliserade integralen $\int_1^\infty f(x)dx \left(\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx\right)$ konvergent om och endast om serien $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ ($\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(k)$) är konvergent. Och mycket riktigt har vi ju

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^b = \ln b \to \infty$$
$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 \to 1$$

då $b \to \infty$.

Detta säger emellertid inget om det specifika *värdet* på serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$. För att bevisa att $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$ kan man t.ex. använda metoder från den matematiska disciplinen Fourieranalys.

Jämförelsen med integraler ger mer allmänt följande resultat:

Sats. Serien

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$$

är konvergent om och endast om $\alpha > 1$.

Övning

1. Visa satsen.

Exempel

Serierna

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1.000001}}, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3}$$

är konvergenta medan serierna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$$

är divergenta.

9 Bara svansen räknas

Enligt de grundläggande räknelagarna för summor kan vi göra uppdelningen

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{N} a_n.$$

Likheten betyder att vänster och höger led är *samma* tal för varje N. Därför har de också samma gränsvärde, d.v.s.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{N} a_n \right).$$

Enligt räknereglerna för gränsvärden kan detta skrivas (om bara gränsvärdet till höger existerar)

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=m}^{N} a_n \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=m}^{N} a_n \end{aligned}$$

eftersom *den ändliga* summan $\sum_{n=0}^{m-1} a_n$ inte beror på N (den är ju ett rent tal, t.ex. 27.85). Enligt definitionen av seriebegreppet har vi sålunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n.$$

Hoppsan, nu råkade vi bevisa ett resultat, trots att jag lovat att vi inte skulle ha några bevis här… Nå-väl, *shit happens*. Resultatet är i varje fall att om ”svansen” $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergerar, så konvergerar hela serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Man kan alltså dela upp en serie precis var som helst (talet m kan ju vara precis hur stort som helst), och om bara svansen är konvergent så är hela serien konvergent.

Omvänt är det lätt att se att om en svans är divergent så är hela serien också divergent.

10 Geometriska serien

Om summanden är en *geometrisk* följd är det lätt att räkna ut seriens värde. Om följden (a_k) är geometrisk är ju delsumman

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

där a_0 är första termen, $q \neq 1$ är kvoten och $n+1$ är antalet termer. Därför är

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to a_0 \frac{1}{1-q}$$

under förutsättning att $|q| < 1$. Vi har sålunda

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = a_0 \frac{1}{1-q}$$

om $|q| < 1$. Det senare kravet är förstås *nödvändigt* för att serien skall kunna konvergera (varför?).

Uppgift

1. Svara på frågan!

Exempel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

(Dessa serier konvergerar snabbt. Till exempel har vi

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{2^k} = 1.99999999999999999999999999999921113909\ldots,$$
$$\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{(-2)^k} = 0.66666666666666666666666666666692962\ldots.)$$

11 Jämförelsesatserna

Att räkna ut summor exakt är i allmänhet icke-trivialt; det är ont om elementära standardmetoder. Däremot har vi redan sett exempel på hur man kan avgöra huruvida en serie är konvergent eller ej (utan att för den sakens skull säga något om dess värde), nämligen när vi jämförde med integraler (eller, rättare sagt: när vi *nämnde* att man kan göra det).

Nu skall vi ge två andra resultat som kan användas för att avgöra konvergens eller divergens. Dessa fungerar också bara för *icke-negativa* summander (d.v.s. $a_n \geq 0$ för varje n). En av fördelarna med icke-negativa summander är att följden av delsummor då *antingen* har ett ändligt gränsvärde (serien är då konvergent) eller går mot oändligheten (serien är då divergent).

Om vi inte kräver att summanden är icke-negativ kan ju ytterligare en sak inträffa, nämligen att följden av delsummor *saknar* gränsvärde (i vilket fall serien förstås är divergent). Detta inträffade i vårt tredje exempel på sidan 15.

En serie där summanden är icke-negativ kallas ibland (något oegentligt) för en *positiv* serie. Serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är alltså positiv omm $a_k \geq 0$ för varje $k \in \mathbb{N}$. (I de allra flesta praktiska fall är $a_k > 0$ för varje $k \in \mathbb{N}$.)

11.1 Jämförelsesats I

Sats. Antag att $a_n \geq 0$ och $b_n \geq 0$ för varje $n \in \mathbb{N}$.

Om $a_n \leq b_n$ för varje n och $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ är konvergent, så är $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ också konvergent och $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Om $a_n \leq b_n$ för varje n och $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är divergent, så är $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ också divergent.

I båda fallen kan vi skriva

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

om vi använder konventionen att en divergent positiv serie (där följden av delsummorna nödvändigtvis går mot oändligheten) har ”värdet” ∞ som sägs vara större än varje reellt tal men lika med sig självt.

Som vanligt ger vi inte beviset. Däremot noterar vi att satsen känns mycket naturlig:

Om ”summan” av talen a_n är ”oändligt stor”, och om talen b_n är *större* (d.v.s. $b_n \geq a_n$ för varje n), ja, då är det nästan uppenbart att ”summan” av talen b_n också är ”oändligt stor”.

Om ”summan” av de positiva talen b_n är 7 (säg), och om de positiva talen a_n är *mindre* (d.v.s. $0 \leq a_n \leq b_n$ för varje n), ja, då är det nästan uppenbart att ”summan” av talen a_n är ett tal mellan 0 och 7.

Ett riktigt bevis är inte svårt. Det baseras förstås på inget annat än de definitioner vi gjort (samt på de reella talens egenskaper).

Exempel

(Den positiva) serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ är konvergent eftersom

$$\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ varför

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

enligt Jämförelsesats I.

Exempel

Serien $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ är konvergent. Varför då? Jo, sedan tidigare matematikstudier är läsaren väl bekant med resultatet

$$\frac{n^2}{n!}\to 0$$

då $n\to\infty$. Enligt definitionen av gränsvärde betyder det att det för varje $\epsilon>0$ finns ett $\omega\in\mathbb{N}$ sådant att $n^2/n!<\epsilon$ för alla $n>\omega$. Speciellt gäller detta för $\epsilon=1$, så det finns ett $\omega\in\mathbb{N}$ sådant att $n^2/n!<1$ för alla $n>\omega$. För dessa n är alltså $n^2<n!$, d.v.s. $\frac{1}{n!}<\frac{1}{n^2}$ varför

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\omega}\frac{1}{n!}+\sum_{n=\omega+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\leq\sum_{n=0}^{\omega}\frac{1}{n!}+\sum_{n=\omega+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

Förra exemplet är nästan intuitivt självklart. Vi vet ju att konvergensen av en positiv serie avgörs av huruvida summanden går mot noll tillräckligt snabbt. Till exempel är $a_n=1/n$ ”för långsamt” medan $1/n^2$ är ”tillräckligt snabbt”. Och $\frac{1}{n!}$ går mot noll mycket snabbare än $\frac{1}{n^2}$, eftersom $n!$ växer mycket snabbare än n^2. (Men naturligtvis behövs ändå ett rigoröst bevis, som det vi gav i exemplet ovan.)

Exempel

Serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$ är konvergent. Varför då? Jo, vi har ju att

$$\frac{n^{100}}{2^n}\Big/\frac{1}{n^7}=\frac{n^{107}}{2^n}\to 0$$

då $n\to\infty$ eftersom exponentialfunktioner växer ”snabbare” än potensfunktioner (det är ett välkänt standardgränsvärde). Därför finns det ett $\omega>0$ sådant att

$$\frac{n^{100}}{2^n}\Big/\frac{1}{n^7}<1,\qquad\forall n>\omega.$$

Vi har därför

$$\frac{n^{100}}{2^n}<\frac{1}{n^7},\qquad\forall n>\omega.$$

Det följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\omega}\frac{n^{100}}{2^n}+\sum_{n=\omega+1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}\leq\sum_{n=1}^{\omega}\frac{n^{100}}{2^n}+\sum_{n=\omega+1}^{\infty}\frac{1}{n^7}<\infty.$$

I exemplet var förstås valet av exponenten 7 godtyckligt. Varje exponent (strängt) större än 1 hade uppenbarligen fungerat i beviset (varför?).

Uppgift

1. Besvara frågan!

11.2 Jämförelsesats II

Vi ger nu en andra jämförelsesats. *Denna är mycket användbar!*

Sats. Antag att $a_n > 0$ och $b_n > 0$ för varje n. Om

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

existerar som ett *positivt* tal (d.v.s. ett element i $\mathbb{R}^+ =]0, \infty[$) så är $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent om och endast om $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ är konvergent.

I satsen jämför vi alltså de två serierna $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Om gränsvärdet av kvoten mellan dessa summander existerar som ett positivt tal, så uppför sig summanderna så pass lika för stora n, att de har samma konvergensegenskaper: Om den ena är konvergent, så är den andra också det. Och om den ena är divergent, så är den andra också det (detta är förstås den kontrapositiva utsagan av ekvivalensen i satsen).

Vi ger inget bevis för den här satsen heller, men vi noterar att den är intuitiv. Som bekant avgörs konvergensen av en serie av hur summanden uppför sig för stora n. Om a_n/b_n t.ex. går mot 7, så betyder det ju att $a_n \approx 7b_n$ för stora n (d.v.s. samma storleksordning), så det är rimligt att serien med a_n konvergerar om och endast om serien med b_n konvergerar.

Gränsvärdet av a_n/b_n måste vara ett *positivt* tal för att satsens slutsats skall gälla. Det är klart att *om* gränsvärdet existerar så är det antingen ett icke-negativt reellt tal (ett element i $[0, \infty[$) eller $+\infty$. Men satsen säger bara något ifall gränsvärdet är nollskilt och ändligt, d.v.s. ett *positivt* reellt tal (ett element i $\mathbb{R}^+ =]0, \infty[$). Varken 0 eller ∞ duger.

Om $a_n/b_n \to 0$ eller $\to \infty$ så betyder det att a_n och b_n går mot noll (om de ens gör det!) med helt olika hastighet (eller hur?), och vi kan därför inte t.ex. dra slutsatsen att ena serien är konvergent bara för att den andra är det – de är helt enkelt på tok för olika. [Tänk på $a_n = 1/n$ och $b_n = 1/n^2$, eller på $a_n = 1/n^2$ och $b_n = 1/n^3$.]

Lägg märke till att vi i satsen lika gärna kan undersöka kvoten b_n/a_n (varför?).

Uppgift

1. Besvara frågan!

Exempel

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ är konvergent. För att visa det kan vi *inte* använda Jämförelsesats I eftersom det enda vi kan säga är att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

d.v.s. att den givna serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ är *större* än ett ändligt tal. Den kan därmed antingen vara ändlig, eller oändlig. (Så undersökningen ger *ingenting*!)

Däremot ligger det nära till hans att misstänka att $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ är konvergent, för om n är stort så är ju nämnaren $n^2-1\approx n^2$ med extremt litet relativt fel. Till exempel har vi redan för $n=1000$ att

$$\frac{1}{n^2-1}=0.000000000001000000000001 00\ldots$$
$$\frac{1}{n^2}=0.000000000001.$$

Vi vill därför jämföra serien med den kända serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

som vi vet är konvergent. Eftersom den givna serien beter sig ”nästan exakt” som den senare för ”stora” n misstänker vi att även den givna serien är konvergent. För att bevisa detta kan vi antingen manuellt undersöka serien med epsilon och deltan, eller så lutar vi oss mot Jämförelsesats II. Kvoten mellan den riktiga och den förenklade summanden är

$$\frac{1}{n^2-1}\bigg/\frac{1}{n^2}=\frac{n^2}{n^2-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\to 1$$

då $n\to\infty$. Talet 1 är ändligt nollskilt, så enligt Jämförelsesats II är $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ konvergent eftersom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ är det.

Att gränsvärdet av kvoten är 1 är förstås att vänta eftersom vi noterade att den givna summanden beter sig ”nästan exakt” likadant som den förenklade för ”stora” n. Men för vår slutsats skull hade det förstås räckt med *något* ändligt nollskilt gränsvärde (d.v.s. ett tal i $\mathbb{R}^+=]0,\infty[$).

Föregående exempel är typiskt för hur Jämförelsesats II används. Däremot var själva presentationen väldigt ”fyllig” av pedagogiska skäl. Författaren ville nämligen visa hur man med intuition kommer fram till arbetshypotesen att serien är konvergent, och att man borde kunna visa detta genom att jämföra med $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ och åberopa Jämförelsesats II.

För att bevisvärdet skall vara fullständigt räcker det emellertid med att visa att gränsvärdet av kvoten mellan den riktiga summanden och den man jämför med existerar som ett ändligt nollskilt tal. (Och så kan det vara bra att poängtera att båda summanderna är positiva. Annars kan man ju över huvud taget inte använda Jämförelsesats II.) Följande presentation hade alltså varit perfekt som lösning på en skriftlig tenta:

Exempel

Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ är konvergent eller ej.

Lösning: Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ är konvergent och

$$\frac{1}{n^2-1}\Big/\frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} \to 1 \in \mathbb{R}^+$$

då $n \to \infty$ så är den givna serien konvergent enligt Jämförelsesats II (som kan användas eftersom båda summanderna är positiva).

Svar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ är konvergent.

Ett annat exempel. (Här är intuitionen att $n + \sqrt{n} \approx n$ om n är mycket stor. Pröva med $n = 1\,000\,000$, sedan med $n = 1\,000\,000\,000\,000$.)

Exempel

Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ är konvergent eller ej.

Lösning: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent och

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\Big/\frac{1}{n} = \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1 \in \mathbb{R}^+$$

då $n \to \infty$ så den givna serien är divergent enligt Jämförelsesats II.

Svar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ är divergent.

Ett vanligt fel

Jämförelsesats II säger att *om* gränsvärdet av kvoten mellan summanderna existerar som ett ändligt nollskilt tal *så* är de två serierna så pass ”lika” att de kan jämföras, d.v.s. om den ena är konvergent, så är den andra också det, och om den ena är divergent, så är den andra också det.

Om däremot gränsvärdet *inte* existerar som ett ändligt nollskilt tal, ja, då säger satsen ingenting! Det är alltså *inte* så, t.ex., att den enas konvergens i sådana fall medför den andras divergens eller tvärtom. *Man kan inte dra någon slutsats alls av satsen, eftersom den inte säger något i det här fallet!* Följande exempel är alltså nonsens (och slutsatsen är felaktig):

Exempel

Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ är konvergent eller ej.

Felaktig lösning: Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ är divergent och

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\Big/\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}+1} \to 0$$

då $n \to \infty$ så är den givna serien konvergent.

Felaktigt svar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ är konvergent.

I nästa exempel är intuitionen att $\sin x \approx x$ om x är ett litet tal. (Notera att $\frac{1}{n^2} \in \left]0, \pi\right[$ för varje $n \in \mathbb{Z}^+$ så $\sin \frac{1}{n^2} > 0$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.)

Exempel

Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ är konvergent eller ej.

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent och

$$\frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \begin{bmatrix} t := \frac{1}{n^2} \\ t \to 0, n \to \infty \end{bmatrix} = \frac{\sin t}{t} \to 1 \in \mathbb{R}^+$$

då $n \to \infty$ så den givna serien är konvergent enligt Jämförelsesats II.

Svar: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ är konvergent.

När man kan en massa ”avancerade” trick för att avgöra konvergens eller ej är det lätt hänt att man glömmer bort de självklara sakerna:

Exempel

Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$ är konvergent eller ej.

Lösning: Eftersom $\cos \frac{1}{n^2} \to 1$ då $n \to \infty$ är serien divergent.

Uppgifter

1. Förklara hur man kan se *direkt* att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{3n^2+1}$ är divergent, utan att använda någon jämförelsesats.
2. Är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{3n^3+1}$ konvergent eller divergent?
3. Är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{3n^4+1}$ konvergent eller divergent?
4. Är $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ konvergent eller divergent?

12 Absolutkonvergens

Vi betraktar återigen serier där summanden tillåts vara negativ. Givet en serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kan vi erhålla en ny serie genom att ersätta summanden med dess belopp (för varje k). Vi får då serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

vilket uppenbarligen är en *positiv* serie (ty $|a_k| \geq 0$ för varje k).

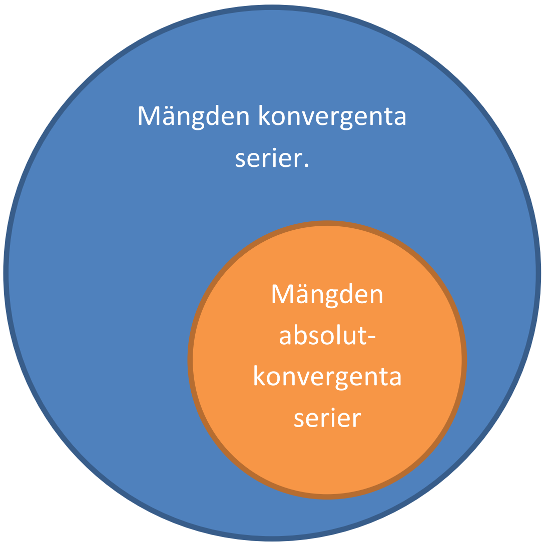
Definition. Låt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ vara en serie. Om serien $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ är konvergent, så säger vi att den ursprungliga serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är *absolutkonvergent.*

Till exempel är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolutkonvergent eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent.

Vi har en väldigt trevlig sats om absolutkonvergenta serier:

Sats. Varje absolutkonvergent serie är konvergent.

I diagram har vi således följande situation:



Med hjälp av den här satsen inser vi t.ex. att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ är konvergent.

Notera att varje konvergent positiv serie är absolutkonvergent (varför?). I nästa avsnitt kommer vi ge ett exempel på en serie som är konvergent men inte absolutkonvergent. (En sådan serie är nödvändigtvis *inte* positiv.)

Exempel

Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ är konvergent eller ej.

Lösning: Serien är absolutkonvergent eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

enligt Jämförelsesats I.

Svar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ är konvergent.

Övning

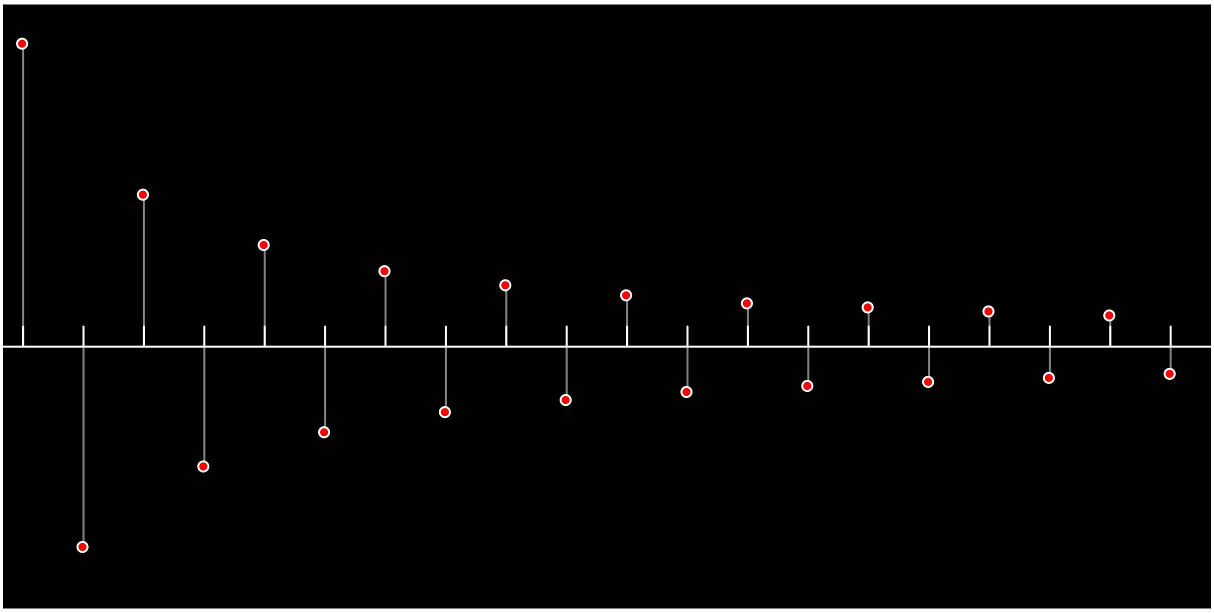
1. Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n}{n+n^2+n^3}$ är konvergent eller ej.

13 Leibniz-serier

En serie kallas *alternerande* om varannan term är positiv och varannan negativ, d.v.s. om $a_k > 0$ för jämna k och $a_k < 0$ för udda k, eller tvärtom.

Definition. En serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kallas för en *Leibniz-serie* omm (1) den är alternerande, (2) beloppet $|a_k| \to 0$ då $k \to \infty$ och (3) beloppet $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ för varje k.

Det sista kravet (3) kan också formuleras som att beloppet $|a_k|$ *minskar* (eller är oförändrat) när k ökar. Om man plottar termerna a_k i en Leibniz-serie får man följande kvalitativa utseende:



Notera att

(1) varannan term är positiv och varannan negativ,
(2) termernas belopp (avståndet till x-axeln) går mot noll (inte uppenbart bara av bilden) och
(3) termernas belopp (avståndet till x-axeln) *minskar* i varje steg (eller är oförändrat).

Övning

1. Ge exempel på en serie som uppfyller (1) och (2) i Leibniz kriterium, men *inte* (3), t.ex. genom att grafiskt plotta termerna.

Leibniz-serier är väldigt trevliga av följande anledning:

Sats. Varje Leibniz-serie är konvergent.

Det kanske enklaste exemplet på en Leibniz-serie är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Eftersom serien är Leibniz är den konvergent. (Däremot är den inte absolutkonvergent, ty $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ inte konvergerar.)

Exempel

Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ är konvergent eller ej.

Lösning: Serien är inte absolutkonvergent (varför?), men den är Leibniz. Låt oss bekräfta det.

Serien är uppenbart alternerande. Med $a_k \coloneqq \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ har vi

$$|a_k| = \frac{n}{n^2+1} \to 0, \qquad n \to 0.$$

Vi behöver bara visa att $|a_k|$ *avtar* i varje steg. Men punkterna $(k, |a_k|)$ ligger på grafen till funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad av $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ och

$$\frac{df}{dx} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0, \qquad \forall x > 1$$

så f är avtagande på $[1, \infty[$. Det följer att $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ för varje $k \in \mathbb{Z}^+$.

Svar: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ är konvergent.

Övning

1. Svara på frågan!