Introduktion till mekaniken

Innehållsförteckning

Inledning

Denna uppsats ämnar ge läsaren en enkel introduktion till den klassiska mekaniken som beskriver och förklarar hur föremål rör på sig och växelverkar med varandra via krafter. Den klassiska mekaniken förklarar hur stora delar av universums materia uppträder, och är därtill synnerligen intuitiv och lättförståelig. Emellertid har denna klassiska mekanik begränsningar; till exempel fungerar modellerna inte när föremål rör på sig med hastigheter som närmar sig ljushastigheten i vakuum, *c* (knappt 300 000 km/s). Dock är den matematiskt korrekt under förutsättning att så inte är fallet och därvid ger den fullgoda beskrivningar av verkligheten. Den klassiska mekaniken kommer tvivelsutan alltid att vara korrekt, användbar, intuitiv och vacker.

Fysik

Fysiken utgör den mest grundläggande studien av universum. En fysiker är en sanningssökare som försöker finna hur universum och naturen är uppbyggd och i grunden fungerar, vilken kunskap vidare kan implicera tekniska innovationer som utvecklar människan och hennes samhälle. I princip all teknik som används dagligen är resultat av fysikaliskt vetande. För att diskutera naturen, behöver vi metoder för att beskriva objekt och händelser. Vi behöver definiera mätbara egenskaper, vilka benämns *storheter*, och anges i förhållande till bestämda värden, *enheter*. Nedan sammanfattas de viktigaste storheterna som används i uppsatsen.

Storhet	**Beskrivning**	**Enhet**
Sträcka (s)	Avstånd/position i rummet	meter (m)
Tid (t)	Avstånd/position i tiden	sekunder (s)
Massa (m)	Egenskap hos materia; ungefär materiamängd; ”vikt”	kilogram (kg)
Laddning (Q)	Egenskap hos materia	coulomb (C)

Prefix

För att handskas med mycket stora och mycket små tal (till exempel det stora avståndet mellan jorden och solen eller det lilla avståndet mellan en atomkärna och dess omgivande elektronskal), använder vi prefix till enheterna. Till exempel skriver vi 1 kilometer (km) istället för 1 000 meter (m). Tabellen nedan definierar de prefix som används i uppsatsen.

Prefix	**Namn**	**Värde**
T	tera-	10^{12}
G	giga-	10^{9}
M	mega-	10^{6}
k	kilo-	10^{3}
d	deci-	10^{-1}
c	centi-	10^{-2}
m	milli-	10^{-3}
µ	mikro-	10^{-6}
n	nano-	10^{-9}
p	piko-	10^{-12}

Diverse matematiska tecken

Nedan definieras några av de matematiska tecken som används i uppsatsen.

Tecken	**Betydelse**	**Användning**
$\mapsto$	avbildas på	$x \mapsto y$ betyder att *y* är en funktion av *x*
$\in$	tillhör	$a \in A$ betyder att *a* tillhör mängden *A* $a \in [A, B]$ betyder att $A \le a \le B$, medan $a \in [A, B[$ betyder att $A \le a < B$
$\perp$	vinkelrät mot	$a \perp b$ betyder att *a* är vinkelrät mot *b*, d.v.s. att vinkeln mellan *a* och *b* är 90°
$\parallel$	parallell med	$a \parallel b$ betyder att *a* är parallell med *b*, d.v.s. att vinkeln mellan *a* och *b* är 0°

Vad är rörelse?

Det är svårt att på något enkelt sätt ge en egentlig och logiskt tillfredställande definition av de grundläggande storheterna som angivits ovan, utan vi förlitar oss på vår intuition av dem. För att definiera rörelse kan vi resonera som följer: Låt ett föremål befinna sig på ett ställe A i rummet vid en tidpunkt t_0. Om föremålet vid ett senare tillfälle t befinner sig på ett annat ställe B i rummet, så har föremålet *flyttat på sig* sträckan mellan A och B under tiden $t - t_0$, eller utfört en *rörelse*. Om vi anger sträckor i enheten meter och tiden i enheten sekunder, så kan vi med matematikens hjälp härleda flera användbara samband mellan dessa storheter.

Rätlinjig rörelse

Vi skall börja med att studera enkla exempel på hur föremål rör på sig; vi skall bestämma sambanden mellan deras förflyttade sträcka, hastighet och acceleration.

Sträckan (s) anger ett avstånd i rummet, ofta hur långt ett föremål färdas, och anges i enheten meter (m). Ofta menas med sträcka även avståndet till origo (0) på en tallinje som representerar olika platser på en sträcka i rummet. *Tiden* (t) anger ett avstånd i tiden, ofta hur lång tid en händelse tar, och mäts i enheten sekunder (s). Vi kan även här också mena (tids-) avståndet till origo (0) på en ”tidslinje”.

Hastighet

Hastigheten (v) anger hur lång sträcka ett föremål färdas under en tidsenhet, d.v.s. hur snabbt det förflyttar sig, och mäts i enheten meter per sekund (m/s). Ofta varierar hastigheten hos ett föremål med tiden. Den genomsnittliga hastigheten, *medelhastigheten* $\bar{v}$, mellan två bestämda tidpunkter anger dock hur snabbt ett föremål i genomsnitt har förflyttat sig mellan tidpunkterna. Om vi ponerar att en bil är vid sträckpunkten s_0 vid tiden t_0 och vid s vid tiden t så blir medelhastigheten därför

$$\bar{v} = \frac{s - s_0}{t - t_0}.$$

Om vi istället betecknar förflyttningen $s - s_0$ med Δs och tidsskillnaden $t - t_0$ med Δt så erhåller vi det enklare uttrycket

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ofta när det är underförstått att det är en differens i sträckan och tiden som avses brukar tecknet delta (Δ) utelämnas. Även medelvärdesstrecket ovan v kan utelämnas.

Hastigheten vid just *ett specifikt tillfälle* kallas *momentanhastigheten*. Denna är i praktiken omöjlig att mäta eftersom vi behöver två observationer vid två olika tidpunkter för att kunna bestämma sträckdifferensen mellan dem; under exakt tiden noll sekunder förflyttar sig föremål ingenting alls. Emellertid kan vi approximera momentanhastigheten vid en tidpunkt t med medelhastigheten under ett mycket kort tidsintervall som inrymmer tidpunkten t. Det är så hastighetsmätare i exempelvis bilar fungerar. Matematiskt definieras momentanhastigheten som gränsvärdet av medelhastigheten när $\Delta t \to 0$, d.v.s.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Om vi känner en funktion $t \mapsto s$ så blir momentanhastigheten lika med derivatan av sträckan med avseende på tiden:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

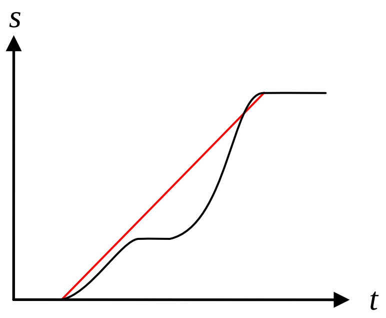
Om vi för en färd känner medelhastigheten och tiden kan vi enkelt beräkna den uträttade sträckan med ekvationen $s = \bar{v}t$.

Om ett föremål rör sig med konstant hastighet, sägs rörelsen vara likformig. Om ett föremål istället rör sig med en varierande hastighet, sägs rörelsen vara accelererad. Om hastigheten är positiv, rör sig föremålet framåt; om hastigheten är negativ rör sig föremålet bakåt.

Om vi ritar upp en graf (exempelvis för en bilfärd) med sträckan avsatt på *y*-axeln och tiden på *x*-axeln blir tangentens lutning vid en viss tidpunkt lika med momentanhastigheten vid den tidpunkten.

Exempel 1

Amanda tar bilen till sitt arbete. På vägen dit tvingas hon stanna vid en korsning. Grafen nedan illustrerar hennes färd. Vi ser att hon i genomsnitt höll en något högre hastighet efter än före korsningen. Den röda linjens lutning är lika med medelhastigheten för hela resan. Medelhastigheten är som synes den konstanta hastighet som under lika lång tid som den verkliga färden också ger lika lång total färdsträcka.



Exempel 2

En bilresa mellan två städer är 370 km lång. Hela vägen kör vi med hastigheten 90 km/h. Hur lång tid kommer resan att ta?

Lösning:

$s = 370 \text{ km}$

$v = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$

$s = vt \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$

$t = \frac{370000 \text{ m}}{25 \text{ m/s}} = 14800 \text{ s} \approx 4 \text{ h } 7 \text{ min}$

Svar: Resan kommer att ta drygt fyra timmar.

Exempel 3

Två stenar rörde sig fritt mot varandra i rymden. Från början var avståndet mellan stenarna 400 m. De kolliderade efter 80 sekunder. Med vilken hastighet kolliderade de?

Lösning:

$s = 400\,\mathrm{m}$

$t = 80\,\mathrm{s}$

$v = \frac{s}{t} = \frac{400\,\mathrm{m}}{80\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m/s}$

Svar: Stenarna kolliderade med hastigheten 5 m/s.

Acceleration

Accelerationen (a) är ett mått på hur snabbt en hastighet förändras och mäts i enheten meter per sekundkvadrat ($\mathrm{m/s^2}$). (Märk att $1\,\mathrm{m/s^2} = 1(\mathrm{m/s})/\mathrm{s}$.)

Medelaccelerationen definieras som hastighetsförändring per tidsenhet:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Momentanaccelerationen definieras analogt med momentanhastigheten:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

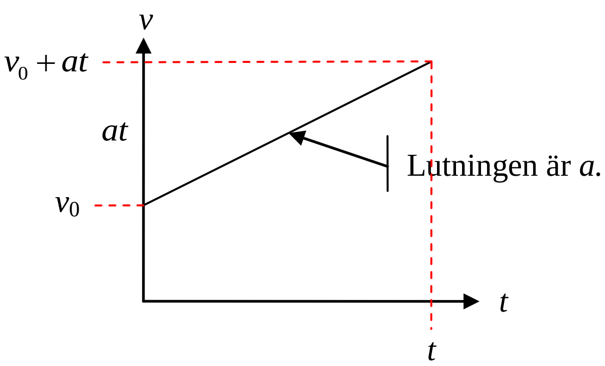
Om vi känner en funktion $t \mapsto v$ så kan momentanaccelerationen också definieras som derivatan av hastigheten med avseende på tiden:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

En accelererad rörelse med konstant acceleration kallas en likformigt accelererad rörelse. En accelererad rörelse med varierande acceleration kallas en olikformigt accelererad rörelse. Om accelerationen är positiv ökar föremålets hastighet; om accelerationen är negativ minskar föremålets hastighet.

Om vi känner medelaccelerationen (eller den konstanta accelerationen) under ett visst tidsintervall kan vi enkelt beräkna den totala hastighetsförändringen med ekvationen $\Delta v = at$. Om ett föremål från början har hastigheten v_0 och sedan accelereras med medelaccelerationen a under tiden t så blir den slutgiltiga hastigheten således $v = v_0 + \Delta v = v_0 + at$.

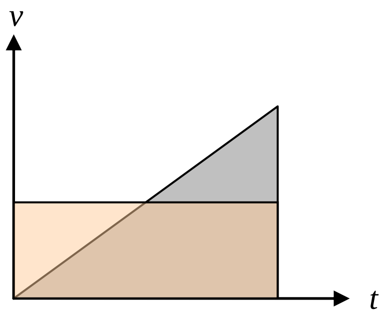
Om vi ritar upp en graf med hastigheten avsatt på y-axeln och tiden på x-axeln blir tangentens lutning vid en viss tidpunkt lika med momentanaccelerationen (vid tidpunkten) och arean under grafen blir den totala sträckan. Om vi istället avsätter accelerationen på y-axeln så blir arean under grafen den totala hastighetsförändringen. Grafen nedan visar en likformigt accelererad rörelse från ursprungshastigheten v_0. Accelerationen är a.



Hur beräknar vi den totala sträckan som ett föremål färdas om det accelereras likformigt (och vi inte har tillgång till en graf)? Vi vill nu finna sträckan som en funktion av ursprungshastigheten v_0, den konstanta accelerationen a samt tiden t.

Vi påminner oss att $s = \bar{v}t$.

Medelhastigheten $\bar{v}$ vid en likformigt accelererad rörelse är lika med det aritmetiska medelvärdet av den första hastigheten v_0 och den sista hastigheten v, $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$. I figuren nedan, i vilken rektangelns höjd är lika med medelvärdet av triangelns första och sista y-värde ser vi att detta stämmer, ty rektangeln och triangeln har lika stor area (och således representerar lika stor sträcka under samma tid).



Detta ger

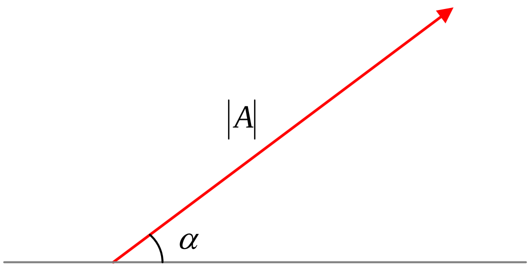
$$s = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t$$
$$s = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_0 + at)t = \tfrac{1}{2}(2v_0 + at)t = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Om föremålet från början stod stilla, d.v.s. om $v_0 = 0$, blir ekvationen speciellt enkel:

$$s = \tfrac{1}{2}at^2$$

Vektorer

En *vektor* är en storhet som representeras av en pil och bestäms dels av sin längd och dels av sin riktning. En storhet utan riktning, d.v.s. endast ett vanligt tal, benämns som motsats *skalär*. Längden av en vektor A (för att betona att en storhet verkligen är en vektor används ibland notationen $\vec{A}$) kallas dess *absolutbelopp* och skrivs $|A|$ (eller bara *A* om riktningen i diskussionen är ovidkommande). Riktningen kan anges på flera olika sätt (med geografiska väderstreck, vinkelangivelse från en viss linje osv.). Nedan visas vektorn *A*.



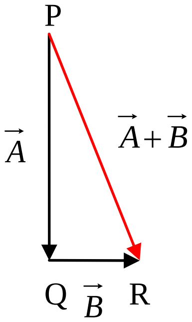
En förflyttning (sträcka) är ett exempel på en vektor: vi kan till exempel vandra åtta kilometer västerut. Även hastigheten är en vektor, då ett föremål i rörelse dels rör sig ett visst antal meter per sekund (absolutbeloppet) samt i en viss riktning. Accelerationen är också en vektor, då den dels förändrar hastigheten med ett visst antal meter per sekundkvadrat och dels gör detta i en viss riktning. Vi har hittills emellertid endast studerat accelerationer som direkt ökar eller minskar hastigheten i samma riktning som hastigheten redan har. Vi kommer senare att betrakta fall där hastigheten förändras i en annan riktning (till exempel om ett föremål har en positiv hastighet åt höger och accelereras uppåt).

Den motsatta vektorn

Den motsatta vektorn $-\vec{A}$ till $\vec{A}$ har samma absolutbelopp som $\vec{A}$ fast går åt rakt motsatta hållet (roteras 180°). Om du exempelvis går minus fem steg framåt, så går du som bekant fem steg bakåt.

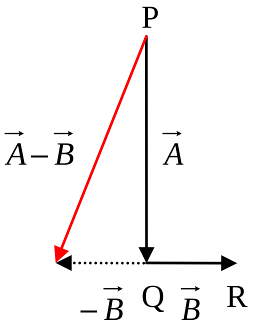
Addition och subtraktion

Två vektorer kan *adderas* med varandra. Ponera som exempel att Amanda, som befinner sig i en punkt *P*, vandrar fem km söderut till en punkt *Q* och sedan vandrar två km österut till en punkt *R*. Vi representerar de båda delvandringarna med vektorerna (sträckorna) *A* respektive *B*. Det är rimligt att definiera vektorsumman $\vec{A}+\vec{B}$ som den vektor som beskriver den totala rörelsen.



Vi ser att vi erhåller summan av två vektorer genom att, när de ligger efter varandra, dra en ny pil (vektor) från den första vektorns startpunkt till den sista vektorns slutpunkt. Vi inser att definitionen av vektorsumma medför att summeringsoperationen är kommutativ, d.v.s. att $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$, precis som för skalärer.

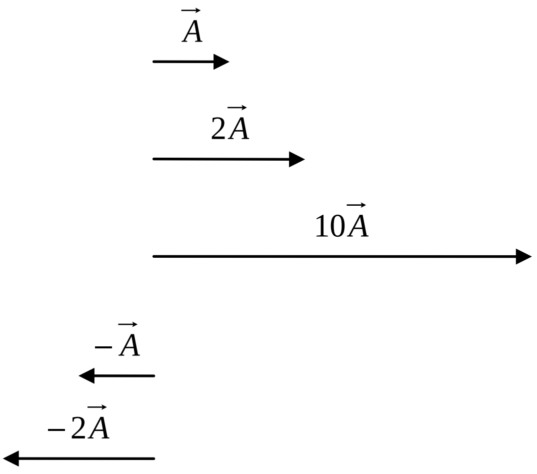
Subtraktion av vektorer genomförs genom att den första vektorn adderas till den andra vektorns motsatta vektor, $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$, också precis som för skalärer.



Om $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ kallas $\vec{A}$ och $\vec{B}$ *komposanter* till $\vec{C}$ som i sin tur kallas *resultant* till $\vec{A}$ och $\vec{B}$. Märk att vår definition av vektorsubtraktion medför att $\vec{A}-\vec{B}=\vec{C} \Leftrightarrow \vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$, vilket också gäller för skalärer.

Multiplikation med skalär

Med produkten $k\vec{A}$ menas den vektor som har samma riktning som $\mathrm{sgn}(k)\cdot\vec{A}$[1] och vars absolutbelopp är lika med produkten av absolutbeloppet för *k* och absolutbeloppet för $\vec{A}$, d.v.s. att $\left|k\vec{A}\right|=|k|\left|\vec{A}\right|$. Märk att riktningen på produkten vänds om *k* är ett negativt tal.



Märk att $k\vec{A}=\underbrace{\vec{A}+\ldots+\vec{A}}_{k\text{ termer}}$, precis som för vanlig multiplikation av skalärer.

[1] Funktionen sgn (signumfunktionen) ger tecknet av argumentet, d.v.s. att $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{om } x>0\\ 0 & \text{om } x=0\\ -1 & \text{om } x<0\end{cases}$

Hastighet som vektor

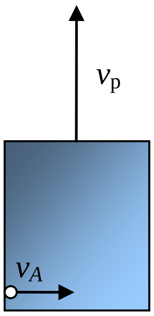
Hastighet är en vektorstorhet. En bil kan till exempel färdas 90 km/h norrut. En hastighets absolutbelopp (här 90 km/h) kallas dess *fart*. En fart innehåller således ingen riktningsinformation. Precis som andra vektorer, kan hastigheter adderas.

Exempel 4

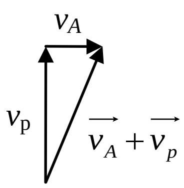
En stor flytande plattform transporterar människor över ett vattendrag. Plattformen åker rakt norrut med hastigheten 6,0 m/s. Nära plattformens västra kant börjar Amanda gå rakt österut med hastigheten 2,5 m/s (relativt plattformen). Med vilken hastighet färdas Amanda totalt sett i förhållande till omgivningen utanför plattformen?

Lösning:

Vi ritar upp plattformen, markerar Amandas position och ritar in bådas hastighetsvektorer.



En vektor bestäms av dess riktning och längd – inte av dess position – varför vi kan flytta på vektorerna och lägga dem efter varandra.



På en sekund förflyttar sig plattformen $|v_p|$ meter norrut medan Amanda förflyttar sig $|v_A|$ meter rakt österut. På en sekund förflyttas således Amanda $|\vec{v}_A + \vec{v}_p|$ meter i samma riktning som vektorn $\vec{v}_A + \vec{v}_p$. Hennes totala hastighet blir således vektorsumman $\vec{v}_A + \vec{v}_p$. Vi kallar summan *v*.

Vi vill nu bestämma både absolutbeloppet och riktningen av *v*. Absolutbeloppet ges av Pythagoras sats:

$$|v| = \sqrt{v_A^2 + v_p^2} \approx 6{,}5\ \text{m/s}$$

Riktningen ges med fördel av arcustangens:

$$\alpha = \arctan\frac{v_A}{v_p} \approx 23^\circ$$

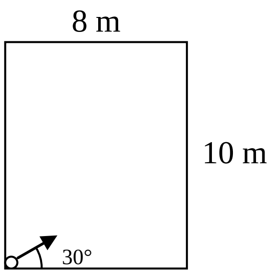
Svar: Amanda färdas med farten 6,5 m/s i riktningen 23° medurs från plattformens hastighetsriktning.

Beträffande hastigheter är *komposantuppdelning* ofta synnerligen användbart. Komposantuppdelning innebär att vi delar upp en vektor $\vec{C}$ i två komposanter $\vec{A}$ och $\vec{B}$ sådana att $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

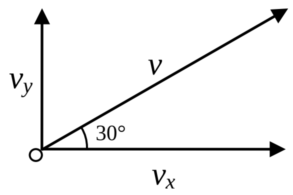
Exempel 5

Ett rum är 8 meter brett och 10 meter långt. Linus står i det sydvästra hörnet av rummet och går med hastigheten 2 m/s som bildar 30° vinkel med rummets södra vägg. Efter hur lång tid når han rummets östra sida?

Lösning:



Vi förstorar hörnet i vilket Linus står samtidigt som vi komposantuppdelar Linus hastighetsvektor v i en horisontell komposant v_x och en vertikal komposant v_y sådana att $\vec{v_x} + \vec{v_y} = \vec{v}$.



Märk att komposantuppdelningen ger två rätvinkliga trianglar. Med denna komposantuppdelning kan vi beräkna Linus horisontella hastighet (hur snabbt han närmar sig östra väggen) och hans vertikala hastighet (hur snabbt han närmar sig norra väggen). Vi beräknar absolutbeloppet av den vågräta hastigheten v_x:

$$|v_x| = v\cos 30° \approx 1{,}7 \text{ m/s}$$

Rummets bredd $s = 8\,\text{m}$ vilket implicerar att $t = \frac{s}{v} = 4{,}6...\,\text{s} \approx 5\,\text{s}$.

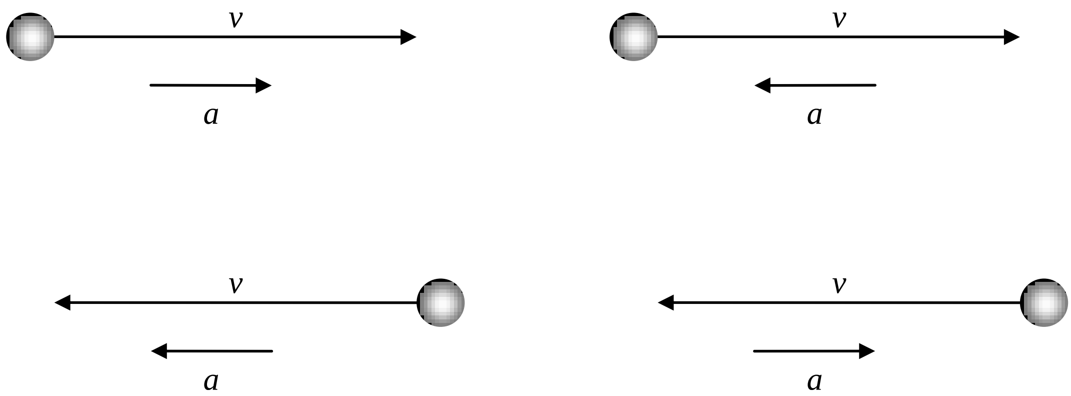
Svar: Linus når rummets östra vägg efter lite knappt 5 sekunder.

Acceleration som vektor

Accelerationen anger hur snabbt hastigheten förändras. Om $a = 0$ för en rörelse rör sig föremålet med konstant hastighet. Om $a > 0$ ökar hastigheten och om $a < 0$ minskar hastigheten. Notera att om hastigheten är negativ, d.v.s. att föremålet rör sig bakåt i förhållande till den valda positiva riktningen, innebär således $a > 0$ att farten (hastighetens absolutbelopp) minskar, medan $a < 0$ innebär att farten ökar. Det är i mekaniska sammanhang med andra ord av synnerligen hög relevans att man noggrant beaktar vektorernas riktning.

Det kan naturligtvis hända att en acceleration får en hastighet att byta riktning. Om till exempel ett föremål som rör sig med en positiv hastighet år höger accelereras åt vänster (d.v.s. att accelerationen åt höger är negativ) kommer först farten att minska. Till slut kommer hastigheten att sjunka till 0 varvid föremålet för stunden står helt stilla. Om accelerationen kvarstår kommer föremålet strax efteråt att få en negativ hastighet, d.v.s. att istället fortsätta att röra sig åt vänster efter vilket hastigheten åt vänster kommer att stiga.

Farten ökar	**Farten minskar**



I de fall farten minskar kommer den så småningom att sjunka till 0, varefter hastigheten kommer att byta riktning och farten kommer att börja öka.

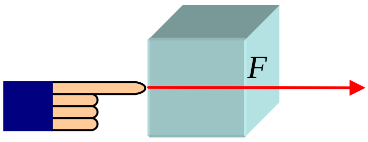
Om accelerationen inte är parallell med hastigheten kommer föremålet att följa en *krökt* (böjd) bana. Detta kommer vi att behandla mer utförligt senare. Märk att vi ännu inte har behandlat *varför* föremål accelererar; föremål kan inte accelerera av sig själva, utan det krävs en *kraft* för att ge ett föremål en acceleration. Krafter kommer vi att behandla i nästa avsnitt.

Krafter

En grundläggande egenskap hos materia är att partiklar och större föremål inte själva kan ändra sin hastighet. Om ett självständigt och opåverkat föremål i rymden står stilla, kommer det att fortsätta att stå stilla. Om föremålet istället är i rörelse, kommer det att fortsätta att röra sig med samma, konstanta, fart och med samma riktning. För att ett föremål skall ändra sin hastighet, måste vi ”tvinga” det till det. Ett föremål ändrar sin hastighet, d.v.s. börjar accelerera, när det påverkas av en *kraft*. Vi kan också säga att en kraft *verkar* på föremålet. Krafter mäts i enheten Newton (N) efter grundaren av den klassiska mekaniken, Sir Isaac Newton.

Kraft är också en vektorstorhet. När man ritar en ”kraftvektorpil” på ett föremål bör pilen börja där kraften i praktiken verkar på föremålet. Detta är naturligtvis endast möjligt i de fall där kraften verkar på en bestämd punkt på föremålet. Vi skall nu alldeles kort studera krafter *intuitivt*, för att öka läsarens förståelse för dem, varefter vi kommer att ge händelseförloppen en noggrannare matematisk beskrivning.

Vi tänker oss ett föremål *A* som svävar fritt i ett rymdskepp. I förhållande till rummet svävar föremålet stilla, d.v.s. $v = 0$. Genom att med handen *skjuta på* föremålet åt höger genom att trycka på dess vänstra sida, d.v.s. applicera en högerriktad kraft *F* på föremålet, kommer föremålet att få en positiv acceleration åt höger. När vi slutar att skjuta på föremålet, försvinner accelerationen och föremålet behåller den av accelerationen erhållna positiva hastigheten åt höger. Hastigheten kommer att förbli konstant ända tills föremålet påverkas av en ny kraft, till exempel krockar med rummets högra vägg.



Kraftresultant

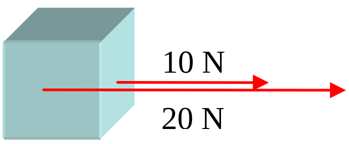
Om vi på föremålet *A* också trycker något svagare på den *högra* sidan, kommer accelerationen som föremålet får att bli något lägre. Om vi istället trycker lika hårt även på dess högra sida, kommer föremålet inte att få en acceleration alls, utan kommer att fortstätta sväva stilla. Om vi trycker hårdare på föremålets högra sida än på dess vänstra, kommer det istället att få en acceleration åt vänster. Detta antyder att även krafter kan adderas och leder oss in på följande slutsats:

Om flera krafter, *komposantkrafter*, verkar på ett och samma föremål kallas vektorsumman av alla krafterna för *resultantkraften* och betecknas ofta F_{res}. Den tänkta resultantkraften har samma verkan på föremålet som alla krafterna tillsammans.

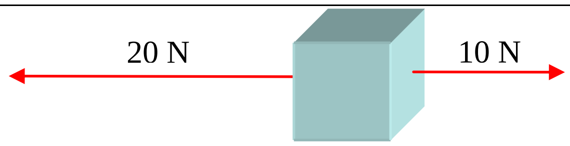
Exempel 6

Beräkna och rita in resultantkraften som verkar på föremålet. Åt vilket håll kommer föremålet att accelerera?

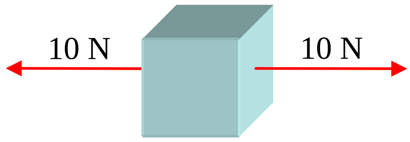
a)



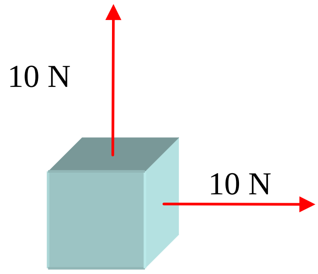
b)



c)

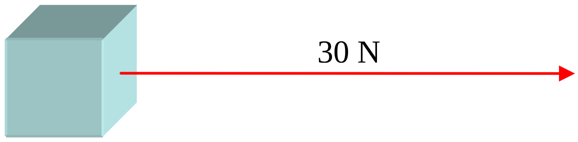


d)



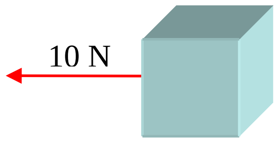
Lösning:

a)



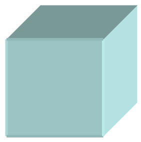
Föremålet accelererar åt höger.

b)



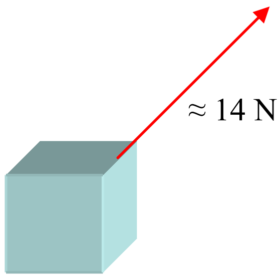
Föremålet accelererar åt vänster.

c)



Föremålet får ingen acceleration alls.

d)



Föremålet accelererar snett uppåt; vinkeln mot vertikala komposanten är 45°.

Newtons första lag

Som vi tidigare sett bevarar ett föremål sin aktuella hastighet ända tills en resultantkraft verkar på det. Om ingen resultantkraft verkar på ett föremål kommer det alltså att förbli i vila om det från början var i vila, eller att behålla sin konstanta hastighet om det från början rörde sig.

Ett föremål ges med andra ord en acceleration om och endast om resultantkraften på föremålet är skild från noll.

$$F_{res} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \qquad \text{(Newtons första lag)}$$

Om vi i rymden med handen trycker på ett stillastående föremål med en kraft så får föremålet en acceleration som ökar dess fart. När vi slutar att trycka kommer den av accelerationen erhållna farten att bibehållas. Om vi på jordens yta sätter oss i en bil och ger bilen en kraft framåt med hjälp av dess motor så får bilen på motsvarande sätt en acceleration som ökar dess fart. När vi släpper gaspedalen, emellertid, kommer bilen att sakta in. Den kraft som främst bromsar in bilen är friktionen mot väglaget (bilens däck stöter emot ojämnheter i väglaget) även om också luftmotståndet verkar inbromsande.

Newtons andra lag

En resultantkraft ger således ett föremål acceleration. Det är rimligt att anta, att en större kraft ger en högre acceleration och att det krävs större krafter för att accelerera stora föremål än att accelerera små föremål. Detta är också innehållet i Newtons andra lag:

$$F_{res} = ma \qquad \text{(Newtons andra lag)}$$

eller ekvivalent

$$a = \frac{F_{res}}{m}$$

där F_{res} är resultantkraften som verkar på föremålet som har massan *m* och som en följd därav ges accelerationen *a*. Enligt formeln är enheten $1\,\text{N} = 1\,\text{kgm/s}^2$ och kraften 1 newton definieras som den kraft som ger ett föremål med massan $m = 1\,\text{kg}$ accelerationen $a = 1\,\text{m/s}^2$. Märk att definitionen av kraft beror på definitionerna av massa, längd och tid, och att definitionen av enheten Newton följaktligen beror på definitionerna av enheterna kilogram, meter och sekunder.

Vi inser att Newtons första lag är en implikation av Newtons andra lag ty $m \neq 0$. Vi ser också att accelerationen har samma riktning som resultantkraften emedan *m* är en skalär.

Exempel 7

I rymden svävar en kloss på 5 kg fritt. När klossen är stilla i förhållande till farkosten, trycker vi på dess högra sida med den konstanta kraften 2 N. Vi fortsätter att trycka med denna kraft på föremålets sida i 0,5 sekunder. Vilken hastighet har klossen kommit upp i när vi släpper den?

Lösning:

$$a = \frac{F_{res}}{m} = 0{,}4\ \text{m/s}^2$$
$$t = 0{,}5\ \text{s}$$
$$v_0 = 0 \Rightarrow v = at = 0{,}2\ \text{m/s}$$

Svar: Klossen får hastigheten 0,2 m/s.

Exempel 8

En kloss med massan 0,25 kg ligger på ett bord. Vi skjuter på klossen med en konstant kraft $F = 0{,}8\ \text{N}$. Detta medför att klossen färdas med konstant hastighet. Beräkna friktionskraften F_μ på klossen, om vi bortser från luftmotståndet.

Lösning:

$$a = 0 \Leftrightarrow F_{res} = 0$$
$$F_{res} = F + F_\mu \Leftrightarrow F_\mu = -F = -0{,}8\ \text{N}$$

Svar: Friktionskraften $F_\mu = -0{,}8\ \text{N}$.

Newtons andra lag kan också användas i komposantform. Om $F = ma$, $\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y}$ och $\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y}$ så är

$$F_x = ma_x$$

och

$$F_y = ma_y.$$

Newtons tredje lag

Om ett föremål verkar på ett annat föremål med en kraft, så verkar det andra föremålet också på det första föremålet med en lika stor fast motriktad kraft av samma typ. Denna princip kallas Newtons tredje lag.

Om föremål A verkar på föremål B med en kraft F, så verkar B på A med kraften $-F$.
(Newtons tredje lag)

Om exempelvis en tennisspelare slår iväg en tennisboll så verkar tennisraketen på bollen med en kraft F, som ger bollen en acceleration framåt. Men en lika stor fast motriktad kraft $-F$ verkar på racketen från bollen. Eftersom spelaren håller i racketen (och således applicerar en lagom stor framåtriktad kraft på det under slaget), emellertid, kommer inte den att få någon alltför betydande acceleration bakåt. (Märk dock att racketens positiva hastighet framåt naturligtvis måste avta någon gång under eller strax efter slaget, till vilket kollisionen med bollen kan bidraga.)

Gravitation

Alla föremål med massa påverkar varandra med attraherande, sammandragande, krafter: gravitationskrafter. Solen håller kvar jorden och de andra planeterna i solsystemet i elliptiska banor med gravitationskrafter, och jorden håller kvar månen i sin bana runt jorden med gravitationskrafter. På jordens yta hålls alla föremål, liksom atmosfären, kvar av jordens gravitation. Om vi på jordens yta håller i ett äpple och sedan släpper det så faller det mot marken på grund av jordens gravitation.

Newton fann att gravitationskraften F_G mellan två kroppar är proportionell mot produkten av föremålens massor och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan dem,

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{(Newtons gravitationslag),}$$

där m_1 och m_2 är respektive kropps massa och r är avståndet mellan kropparnas tyngdpunkter (tyngdcentra). Proportionalitetskonstanten $G \approx 6{,}67\times 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$ kallas gravitationskonstanten.

Exempel 9

Jordens massa är $5{,}97\times10^{24}$ kg och solens massa är $1{,}99\times10^{30}$ kg. Avståndet mellan jorden och solen är vid ett tillfälle 147 Gm. Beräkna gravitationskraften från solen på jorden och gravitationskraften från jorden på solen.

Lösning:

$$F_G = G\frac{5{,}97\times10^{24}\ \mathrm{kg}\cdot 1{,}99\times10^{30}\ \mathrm{kg}}{\left(147\times10^{9}\right)^2\ \mathrm{m}^2} \approx 3{,}67\times10^{22}\ \mathrm{N}$$

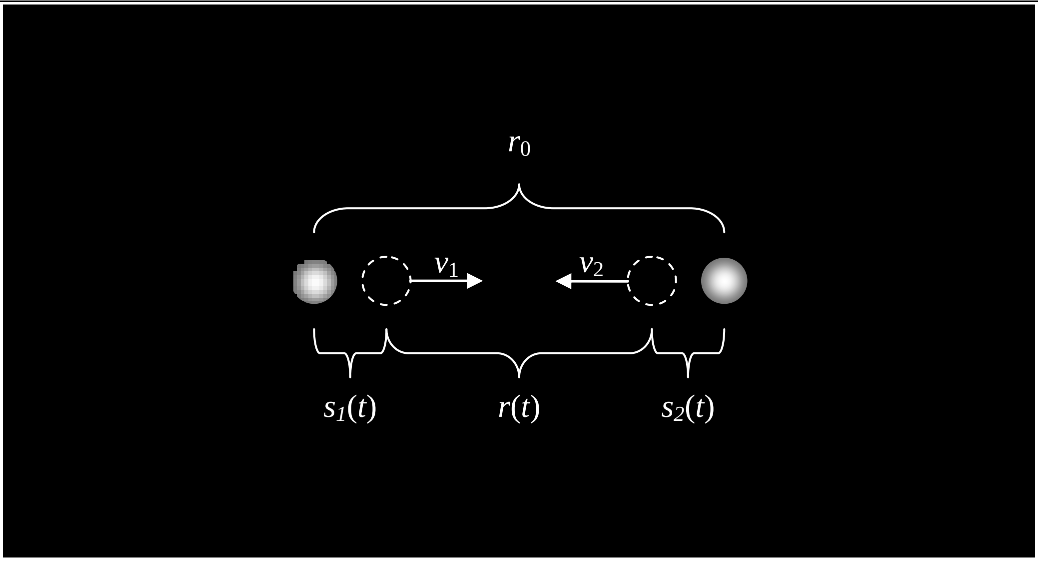
Svar: Solen påverkar jorden med kraften $3{,}67\times10^{22}$ N rakt mot solen. Jorden påverkar solen med kraften $3{,}67\times10^{22}$ N rakt mot jorden.

Exempel 10

Två stenar med massorna m_1 respektive m_2 svävar fritt i rymden, inte i närheten av någon annan massiv himlakropp. De står stilla i förhållande till varandra, och avståndet mellan dem är r_0. Efter hur lång tid kolliderar de med varandra?

Lösning:

Låt $r(t)$ vara avståndet mellan stenarna vid tiden t. Det första avståndet $r(0) = r_0$. Kraften på respektive sten vid tiden t blir $F(t) = G\dfrac{m_1 m_2}{r(t)^2}$ och accelerationen som den första stenen erhåller blir $a_1(t) = G\dfrac{m_2}{r(t)^2}$ medan den andra stenen erhåller accelerationen $a_2(t) = G\dfrac{m_1}{r(t)^2}$. Vid tidpunkten t har stenarna förflyttat sig sträckorna $s_1(t)$ respektive $s_2(t)$. Se figuren nedan.



Vi inser att stenarnas hastighet mot varandra ökar med tiden, men också att accelerationen ökar.

Figuren visar att $r(t) = r_0 - s_1(t) - s_2(t)$. Genom derivering av likheten erhåller vi att

$$r'(t) = -s_1'(t) - s_2'(t)$$

och

$$r''(t) = -s_1''(t) - s_2''(t) = -a_1(t) - a_2(t)\,.$$

Insättning av uttrycken för funktionerna a_1 och a_2 ger

$$r''(t) = -G\frac{m_2}{r(t)^2} - G\frac{m_1}{r(t)^2} = -G(m_1 + m_2)r(t)^{-2}\,.$$

Om vi sätter $k = -G(m_1 + m_2)$ erhåller vi

$$\begin{cases} r'' = kr^{-2} \\ r(0) = r_0 \\ r'(0) = 0 \end{cases}.$$

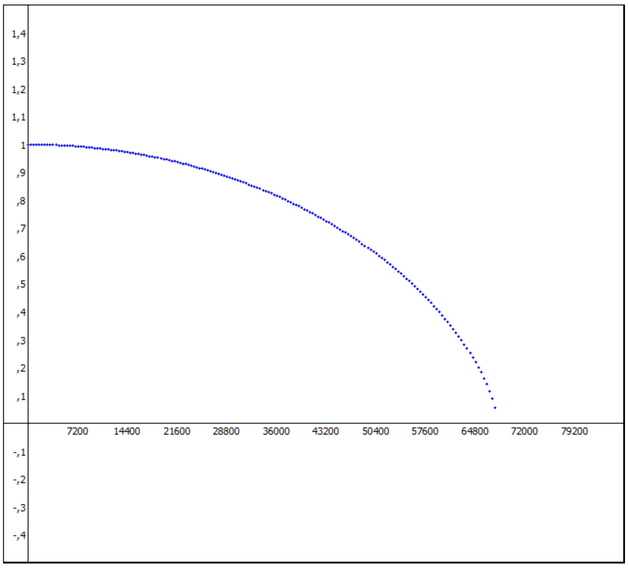
Detta begynnelsevärdesproblem kan lösas numeriskt.

Exempel 11

Låt stenarna i exempel 10 från början befinna sig på avståndet $r_0 = 1\,\mathrm{m}$ från varandra, och antag att de har massorna $m_1 = m_2 = 2\,\mathrm{kg}$. Efter hur lång tid kolliderar stenarna med varandra?

Lösning:

Vi sätter $k = -G(m_1 + m_2) = -4G$. Numeriskt kan vi rita upp grafen till funktionen $t \mapsto r$. Med hjälp av AlgoSim erhåller vi diagrammet nedan.



Vi ser att stenarna kolliderar efter omkring 18,8 timmar.

Tyngd

Alla föremål i närheten av jorden eller någon annan himlakropp, attraheras av denna med gravitationskrafter. Gravitationskraften som verkar på ett föremål, kallas också föremålets tyngd.

Gravitationskraften på ett föremål är enligt Newtons gravitationslag proportionell mot föremålets massa. Vi kan därför för varje bestämt avstånd från en viss himlakropp, beräkna den konstanta, bestämda kraften per kilogram massa. Denna storhet kallas gravitationsfältstyrka, betecknas g och får således enheten N/kg.

Vi vill nu beräkna gravitationsfältstyrkan vid jordytan.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G\frac{m_j m}{r^2}}{m} = G\frac{m_j}{r^2}$$

där m_j är jordens massa och r är jordens radie. Emedan $m_j = 5{,}9736 \times 10^{24}$ kg och $r = 6373$ km erhåller vi $g \approx 9{,}81$ N/kg. Jorden är inte ett perfekt klot, utan en rotationsellipsoid, vilket innebär att g inte är exakt – men ändock approximativt – lika överallt på jorden. Tyngden av ett föremål med massan m blir således $F_G = mg$ vid jordytan.

Exempel 12

En ryggsäck har massan $m = 12$ kg. Med vilken kraft F måste vi hålla den när den är stilla i luften?

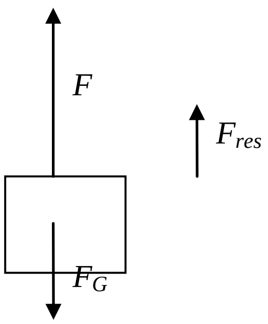
Lösning:

Newtons första lag ger att $|F| = |F_G| = mg = 12\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{N/kg} \approx 118\,\text{N}$. Märk att ryggsäckens tyngd och därmed också kraften med vilken vi måste hålla ryggsäcken blir mindre om vi står på en mindre massiv planets yta, till exempel Mars.

Exempel 13

Samma ryggsäck som i exemplet ovan står på golvet. Vi lyfter den uppåt med en kraft så att ryggsäcken får accelerationen $a = 1\,\text{m/s}^2$ rakt uppåt (vi väljer positiv riktning uppåt). Med vilken kraft *F* måste vi då lyfta? (Vi bortser från luftmotståndet.)

Lösning:



$$\begin{cases} F_{res} = ma \\ F_{res} = F + F_G \end{cases}$$

$$ma = F + F_G \Leftrightarrow F = ma - F_G$$

$$F \approx 130\,\text{N}$$

(Märk att $F_G < 0$.)

Svar: Vi måste lyfta med kraften 130 N.

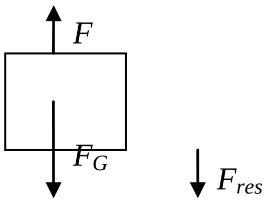
Anmärkning:

Om vi efter ett tag lyfter ryggsäcken med konstant hastighet uppåt, så blir lyftkraften återigen lika med tyngden av ryggsäcken, d.v.s. omkring 118 N.

Exempel 14

Samma ryggsäck som i exemplet ovan hålls stilla i luften. Vi sänker den sedan rakt nedåt genom att hålla den med en kraft sådan att ryggsäcken får accelerationen $1\,\text{m/s}^2$ rakt nedåt. (Vi väljer fortfarande positiv riktning uppåt, varför $a = -1\,\text{m/s}^2$ i den positiva riktningen.) Med vilken kraft *F* måste vi då hålla ryggsäcken?

Lösning:



$$\begin{cases} F_{res} = ma \\ F_{res} = F + F_G \end{cases}$$

$$ma = F_G + F \Leftrightarrow F = ma - F_G$$

$$F \approx 106\ \text{N}$$

Svar: Vi måste hålla med kraften 106 N.

Tyngdacceleration

Om vi släpper ett föremål i ett gravitationsfält (en plats där gravitationskrafter verkar på massor) så att inga andra krafter än gravitationskraften verkar på föremålet, så accelererar det och sägs *falla fritt*. Om vi släpper en sten några meter från jordytan, kommer den inte att falla helt fritt, eftersom även luftmotståndet verkar (uppåt) på stenen. Stenen får därvid något lägre acceleration än vad den skulle ha fått utan luftmotståndet. Om stenen emellertid befinner sig i vakuum så kommer den att falla fritt mot jordytan.

Vi vill nu beräkna med vilken acceleration *a* ett föremål med massan *m* faller om det får falla fritt vid jordytan.

$$a = \frac{F_{res}}{m} = \frac{F_G}{m} = \frac{mg}{m} = g$$

Vi ser att föremålet får lika stor acceleration som gravitationsfältstyrkan på platsen. Detta gäller som formlerna antyder generellt – alltså inte bara på jorden. Vi ser också att alla föremål, oavsett massa och tyngd, faller med samma acceleration. Om vi bortser från luftmotstånd, kommer således en blytyngd på 10 Mg att falla med samma acceleration – 9,82 m/s^2 – mot jorden som en bomullstuss med massan 0,2 gram. Denna lag kallas ofta Galileis lag.

Exempel 15

Amanda kastar en boll rakt uppåt. Efter tiden $t_{tot} = 1{,}4\ \text{s}$ fångar hon den igen. Vi bortser från luftmotståndet.

a) Vilken acceleration hade bollen i luften under kastet?

b) Hur lång tid tar uppvägen?

c) Hur högt kommer bollen?

d) Vilken hastighet hade bollen när den lämnade handen?

e) Vilken hastighet hade bollen högst upp i kastet?

f) Vilken hastighet hade bollen när den fångades igen?

g) Rita graferna till funktionerna $t \mapsto s$, $t \mapsto v$ samt $t \mapsto a$ för $t \in [0;1{,}4]$, där *s* är höjden ovan handen.

Lösning:

a) Bollen påverkas endast av tyngdkraften som är riktad rakt nedåt, och ges därför under hela kastet den konstanta accelerationen $a = -g = -9{,}82\ \mathrm{m/s}^2$ (vi väljer en negativ *a* för att få positiv hastighet uppåt). Accelerationen sänker först farten tills toppläget där bollen momentant står stilla, varefter den ändrar riktning och börjar falla mot marken med fortsatt samma acceleration. Valet av den positiva riktningen implicerar att hastigheten är positiv på vägen upp och negativ på vägen ned.

b) Hastigheten byter tecken (riktning) överst i kastet. Eftersom hastighetsfunktionen definierad av $v = v_0 - gt$ är kontinuerlig måste därför hastigheten där vara 0.

Låt t_{topp} vara tidpunkten när bollen når sin maximala höjd.

$$v_0 - gt_{topp} = 0 \Leftrightarrow t_{topp} = \frac{v_0}{g}$$

Låt t_{tot} vara tiden för hela kastet. $t_{tot} > 0$. Vid den tiden är $s = 0$ igen.

$$s = v_0 t_{tot} - \tfrac{1}{2} g t_{tot}^2 = 0 \Leftrightarrow t_{tot}\left(v_0 - \tfrac{1}{2} g t_{tot}\right) = 0 \Leftrightarrow v_0 - \tfrac{1}{2} g t_{tot} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_{tot} = \frac{2v_0}{g}$$

Vi ser att $\dfrac{t_{tot}}{t_{topp}} = 2$ och följaktligen att $t_{topp} = 0{,}7\ \mathrm{s}$.

c) Vi betraktar rörelsen från handen och upp till maximihöjden. Vi kan som bekant använda formeln $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ vid en dylik konstant acceleration om vi känner *den första* hastigheten v_0. Nu känner vi dock endast *den sista* hastigheten *v*, varför vi behöver härleda en snarlik formel. Eftersom $v = v_0 + at$ får vi

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = (v - at)t + \tfrac{1}{2} a t^2 = vt - at^2 + \tfrac{1}{2} a t^2 = vt - \tfrac{1}{2} a t^2$$

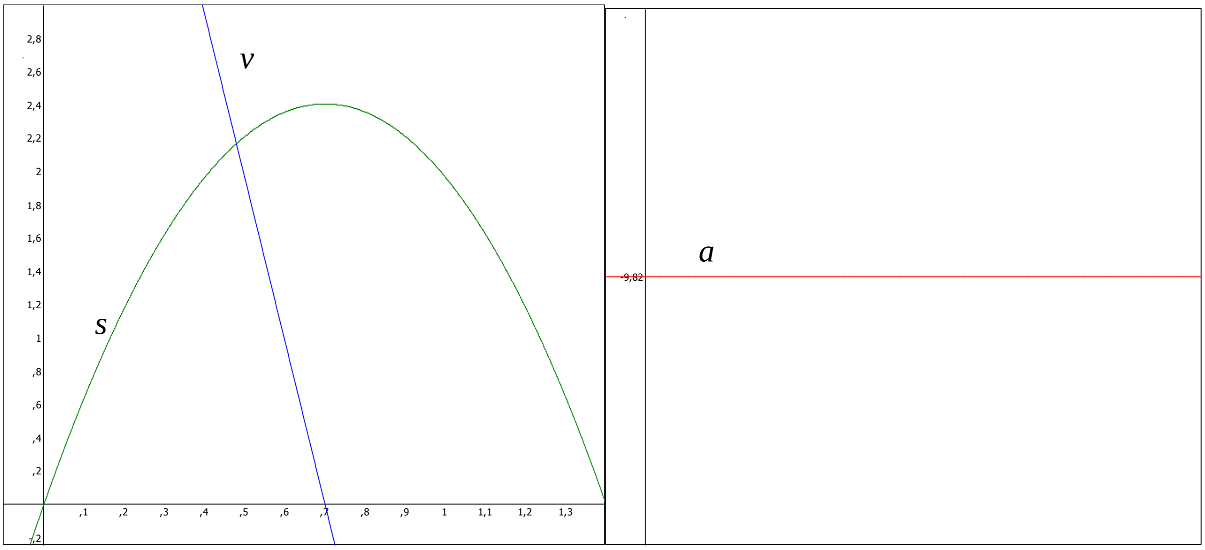
och emedan vi känner $v = 0\ \mathrm{m/s}$, $t = t_{tot}/2$ samt *a* erhåller vi $s \approx 2{,}4\ \mathrm{m}$, vilket innebär att bollens maximala höjd är 2,4 meter över handens utkastshöjd.

d) Även här betraktar vi endast färden upp till maximihöjden. Vi har $v = v_0 + at \Leftrightarrow v_0 = v - at$ vilket ger $v_0 \approx 6{,}9\ \mathrm{m/s}$.

e) Vi har redan konstaterat att $v_{topp} = 0\ \mathrm{m/s}$.

f) Vi betraktar nu endast fallet nedåt från maximihöjden. $v = v_0 + at \approx -6{,}9\ \text{m/s}$, vilket var förväntat ty rörelsen är ”symmetrisk” med avseende på tidpunkten för maximihöjden.

g) Vi har att $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, $v = v_0 + at$ och $a = -9{,}82\ \text{m/s}^2$. Programvaran Algo-Sim används för att rita upp graferna.



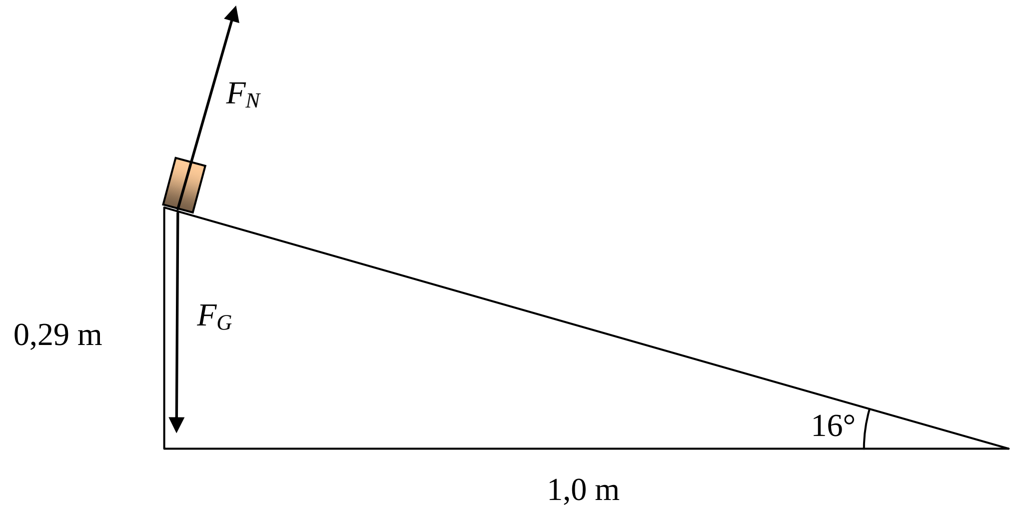
Av både formlerna för *s*, *v* och *a* ovan samt av graferna ser vi som väntat att $v = \dfrac{ds}{dt}$ och $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$.

Exempel 16

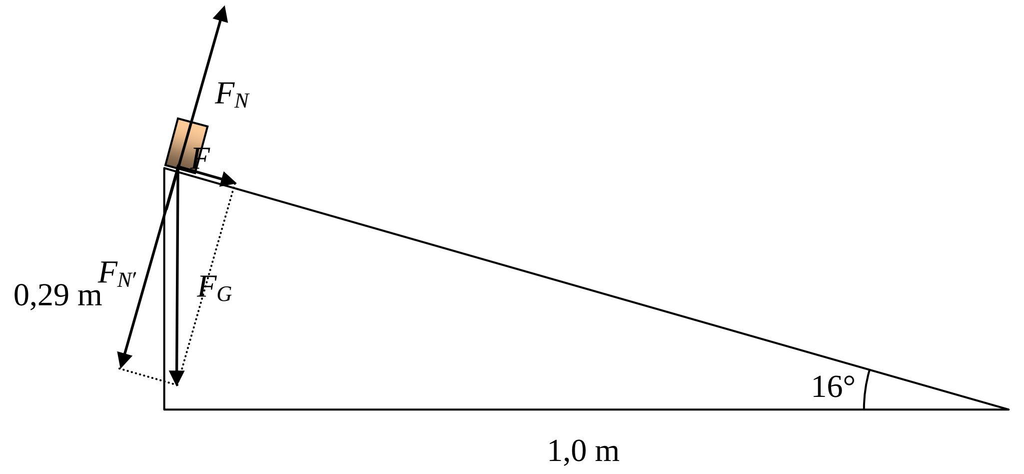
En kloss med mycket glatt yta och massan $m = 0{,}5\ \text{kg}$ placeras på toppen av ett lika glatt lutande plan med spetsvinkeln 16°, basen 1,0 meter och höjden 0,29 meter. Bestäm vagnens fart vid slutet av planet. Vagnen glider nästan helt friktionsfritt, varför vi kan bortse från friktionen.

Lösning:

Nu verkar endast två krafter på vagnen: tyngdkraften F_G rakt nedåt och en normalkraft F_N från planet som håller vagnen uppe. (Det vore förvisso något oväntat om vagnen föll rakt igenom det.) Se figuren.



Vi komposantuppdelar nu tyngdkraften F_G i en komposant $F_{N'}$ parallell med normalkraften F_N och en komposant F parallell med planets övre yta.



Eftersom vagnen inte får någon acceleration i riktningen parallell med normalkraften F_N så måste $F_N = -F_{N'}$. Vi har ingen friktionskraft, varför resultantkraften blir lika med F. Vi erhåller med enkel geometri att $F = F_G \sin 16° = mg \sin 16°$ varvid accelerationen i rörelseriktningen blir $a = F/m = g \sin 16°$. Tiden för färden nedför planet ges av $s = \frac{1}{2}at^2$ där sträckan $s = \sqrt{0{,}287^2 + 1}$ ges av Pythagoras sats. $t = \sqrt{2s/a}$ och sluthastigheten ges av $v = at$. Med alla värden insatta erhålls $v \approx 2{,}4\,\text{m/s}$.

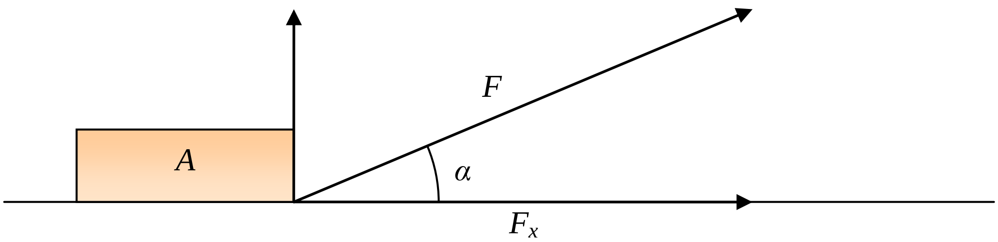
Svar: Slutfarten blir 2,4 m/s.

Energi

Energi är en mycket grundläggande storhet inom naturvetenskapen. Energi sägs ett föremål ha när det kan utföra ett *arbete*, vilket kan betraktas som en energiöverföring eller en ”händelse”. Det finns olika typer av energi; allt som rör på sig har rörelseenergi, allt som är varmare än absoluta nollpunkten har värmeenergi (termisk energi), ström av elektroner utgör elektrisk energi, ljus har strålningsenergi och kolhydrater har kemisk energi, för att nämna några exempel. Energi kan omvandlas mellan olika former, men enligt *energiprincipen* kan energi *varken skapas eller förintas*. Till exempel kan den kemiska energin i bensinens molekyler omvandlas till rörelseenergi hos bilen. Elektrisk energi kan i en lampa omvandlas till strålningsenergi (ljus) och i ett element till värmeenergi. Energi betecknas *E* och mäts i enheten joule (J).

Arbete

Ett arbete är en energiomvandling. Arbete betecknas *W* och får samma enhet som energi, J. Om en kraft verkar på ett föremål så att det börjar röra på sig, så är arbetet lika med produkten av kraftkomposanten i rörelseriktningen och den förflyttade sträckan.



Om kraften *F* förflyttar föremålet *A* en sträcka *s* så utförs således arbetet $W = F_x s = Fs\cos\alpha$. Detta är rörelseenergin som föremålet *A* erhåller. Vi ser av ekvationen $W = F_x s$ att enheten 1 J = 1 Nm = 1 kgm²/s².

Mekanisk energi

Kinetisk energi

Alla föremål som rör på sig, d.v.s. har en hastighet $v \neq 0$, har *rörelseenergi* som också benämns *kinetisk energi*. Vi vill nu finna en formel att beräkna den kinetiska energin med och utgår då från att den kinetiska energin kommer från det arbete som ger det tidigare stillastående föremålet den nya hastigheten.

Låt föremålet *A* stå stilla och förflytta det sedan en sträcka *s* med den konstanta resultantkraften *F*, där *F* ∥ *s*, så att föremålets nya hastighet blir *v*. Detta upptar tiden *t*, och ger arbetet

$$W = F \cdot s = ma \cdot s = m \cdot \frac{v}{t} \cdot s = mv \cdot \frac{s}{t} = mv \cdot \bar{v} = mv \cdot \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2} mv^2$$

av vilket vi kan antaga slutsatsen att ett föremål med massan *m* och hastigheten *v* har den kinetiska energin

$$E_k = \tfrac{1}{2} mv^2 .$$

Potentiell energi

Potentiell energi kan betraktas som ”lagrat” arbete. Om vi utför ett arbete *mot* en kraft, kommer föremålet att laddas upp med potentiell energi. Om sedan kraften får verka fritt, kommer denna potentiella energi att omvandlas till kinetisk energi när föremålet påverkas av kraften. Eftersom det finns olika typer av krafter, finns det också olika typer av potentiell energi. Vi skall nu studera potentiell energi i tyngdkraftsfältet, där den motverkande kraften är gravitationskraften.

Ett föremål med massan m hålls stilla i luften vid höjden h och släpps. När tyngdkraften drar ner föremålet till nollnivån (marken) utför jorden således arbetet $W = Fs = mgh$. Föremålet får då kinetisk energi och luften omkring värms upp något. Bara genom att befinna sig ovan nollnivån hade alltså föremålet den potentiella energin (lägesenergin) $E_p = mgh$. Märk att vi här har valt höjden vid jordytan $h = 0\,\text{m}$ som en *nollpunkt* för den potentiella energin. Vi kan alltid fritt välja nollpunkt, eftersom storleken på arbeten beror på differenser i potentiell energi som tydligen blir lika stora oavsett var nollpunkten ligger. (E_p är en linjär funktion av h.)

Summan $E_k + E_p$ för ett föremål kallas föremålets totala *mekaniska energi* E_m.

Exempel 17

Ett föremål med massan m hålls 30 meter ovan marken och släpps sedan. Med vilken hastighet slår föremålet i marken, om vi bortser från luftmotståndet?

Lösning:

Vid höjden $h = 30\,\text{m}$ har föremålet den potentiella energin $E_p = mhg$. När föremålet släpps faller det mot marken. Under hela fallet minskar E_p ty h minskar. Men energi kan inte försvinna, utan den potentiella energin omvandlas till kinetisk energi (hastigheten ökar som bekant konstant under fallet). Vid marken, där $h = 0\,\text{m}$ har all potentiell energi omvandlats till kinetisk energi, varför $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ där det vänstra ledet är den kinetiska energin strax före nedslaget och det högra ledet är den tidigare potentiella energin. Solvering ger $v = \sqrt{2gh}$. Märk att Galileis lag bekräftas av detta, ty v inte beror på m. En numerisk approximation ger att $v \approx 24\,\text{m/s}$.

Svar: Föremålet slår i marken med hastigheten 24 m/s.

Anmärkning:

När föremålet slår i marken kan det studsa upp igen, d.v.s. att den kinetiska energin börjar övergå i potentiell energi igen. Oftast förloras dock mycket mekanisk energi till termisk energi. Till slut lägger sig föremålet stilla på marken. Då har all mekanisk energi omvandlats till andra former, främst termisk energi, ty både v och $h = 0$.

Om vi hade räknat med luftmotstånd hade mekanisk energi omvandlats till termisk energi redan under fallet, varför v vid nedslaget hade blivit något mindre än vad vi nu räknade fram.

Exempel 18

Lös exempel 15 med energisamband.

Lösning:

Föremålet står stilla på höjden $h = 0{,}29\,\mathrm{m}$ där den mekaniska energin $E_m = E_p = mgh$. Vid slutet av banan är $E_p = 0$ och således $E_m = E_k$. $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ ger $v = \sqrt{2gh} \approx 2{,}4\,\mathrm{m/s}$. Vi märker att energiuträkningen blir mycket enklare än den rent rörelsebetingade uträkningen.

Effekt

Effekt betecknas med *P* och definieras som arbete per tidsenhet.

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Effekt mäts följaktligen i enheten J/s = kgm^2/s^3 eller W (watt). Blanda inte ihop storheten arbete (*W*) med effekt-enheten watt (W).

Exempel 19

Amanda lyfter på 1 sekund upp en korg på 3 kg till ett 1,4 meter högt bord, medan Linus på 1,3 sekunder lyfter upp en annan korg med massan 4,2 kg. Vems arbete hade högst effekt?

Lösning:

För Amanda gäller att $P_A = \frac{W_A}{t_A} = \frac{m_A gh}{t_A} \approx 41\,\mathrm{W}$ medan det för Linus gäller att $P_L = \frac{W_L}{t_L} = \frac{m_L gh}{t_L} \approx 44\,\mathrm{W}$. Linus lyft hade således något högre effekt.

Exempel 20

En bil med massan $m = 1500\,\mathrm{kg}$ har hastigheten $v_0 = 90\,\mathrm{km/h}$. Motorn utför sedan ett arbete på $W = 0{,}23\,\mathrm{MJ}$ på bilen. Vi bortser från friktion och luftmotstånd. Med vilken hastighet *v* åker bilen sedan?

Lösning:

Bilens kinetiska energi från början var $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ där $v_0 = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$ och den nya kinetiska energin blir $E_k = E_{k0} + W$. Om vi sätter $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ och löser ut *v* erhåller vi $v = 30{,}52...\,\mathrm{m/s} \approx 110\,\mathrm{km/h}$.

Exempel 21

En glödlampa har effekten $P = 75\,\mathrm{W}$ och lyser i en timme. Hur mycket energi går åt?

Lösning:

$$P = 75\,\mathrm{J/s}$$
$$t = 3600\,\mathrm{s}$$
$$E = Pt = 0{,}27\,\mathrm{MJ}$$

Fördjupning 1 – Elektrisk ström

En elektrisk ström är en ström, ett flöde, av elektroner. Den elektriska spänningen U mäts i enheten volt (1 V = 1 J/C) och anger hur mycket energi som frigörs per laddning när elektronerna passerar. Elektrisk laddning Q mäts i enheten coulomb (C). En elektron har (minus-) laddningen $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Strömmen I anger hur stor laddning som passerar per sekund och mäts i enheten ampere (1 A = 1 C/s). Följaktligen ges den elektriska effekten (energi per sekund) av $P = UI$.

Exempel 22

Hur många elektroner passerar per sekund i lampan i exempel 21? Vi antar att lampan är kopplad till ett eluttag med spänningen $U = 230\,\mathrm{V}$.

Lösning:

$$UI = P \Leftrightarrow I = P/U = 0{,}326...\,\mathrm{A}$$

Vi kallar antalet elektroner som passerar per sekund för n. Då har vi $ne = I$, vilket ger $n = I/e \approx 2{,}0 \times 10^{18}$ elektroner/s.

För ett föremål i rörelse (som accelererar) kan vi härleda en alternativ formel för effekten.

$P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{Fs}{t} = Fv$ där v är föremålets hastighet.

Detta samband är orsaken till att exempelvis bilar har en maxhastighet. Motorn ger ifrån sig en maximal effekt P, vilket ger en drivande kraft $F = P/v$. När hastigheten v ökar, minskar kvoten P/v och således även F. Till slut blir den drivande kraften F lika stor som summan av friktionskraften och luftmotståndet $F_\mu + F_L$ som verkar bakåt. Då blir F_{res} lika med noll, och ingen vidare acceleration är möjlig.

Friktion och luftmotstånd

Vi har hittills oftast inte haft något större behov av eller bortsett från att studera friktion och luftmotstånd, men skall nu titta närmare på dessa krafter.

När en kloss dras på en horisontell yta så hakar den i bordet på en mikroskopisk nivå, vilket motverkar rörelsen framåt. Denna kraft, som således verkar rakt bakåt, kallas *friktionskraft*, F_μ. Förhållandet mellan F_μ och normalkraften F_N kallas friktionskoefficienten μ.

$$\mu = \frac{F_\mu}{F_N}$$

μ beror på de två ytorna som är emot varandra. Om vi drar en kloss framåt med en konstant kraft F på ett horisontellt underlag och klossen färdas med konstant hastighet, så innebär det att $F_{res} = 0$ och att $F = -F_\mu$, d.v.s. att friktionskraften är lika stor som dragkraften.

Luftmotståndet motverkar en rörelse i luften eller i ett annat gasformigt ämne. Man har funnit att luftmotståndet F_L vid ”måttliga” hastigheter approximativt är proportionellt mot hastigheten och vid ”högre” hastigheter är approximativt proportionellt mot kvadraten på hastigheten.

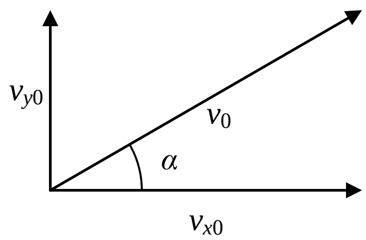
Vi har alltså att $F_L = kv^n$ där $n \in \{1,2\}$.

Om till exempel en fallskärmshoppare hoppar från ett flygplan, så kommer till en början tyngden F_G att vara större än luftmotståndet F_L. Därför blir resultantkraften större än noll och nedåtpekande, vilket gör att fallskärmshopparen accelererar nedåt. Så småningom, emellertid, när hastigheten ökat tillräckligt, kommer F_L att ha blivit lika stor som tyngden F_G, varvid F_{res} och också accelerationen a kommer att bli noll. Fallskärmshoppare, och andra fallande föremål, uppnår således en maximal fallhastighet (gränshastighet). (Om ett föremål faller fritt (i vakuum), emellertid, kommer det naturligtvis inte att uppnå någon gränshastighet.)

Kroklinjig rörelse

Vi skall nu studera kroklinjig rörelse. Som exempel ska vi titta på *kaströrelser*, som uppkommer när ett föremål ges en ursprungshastighet i ett tyngdkraftsfält.

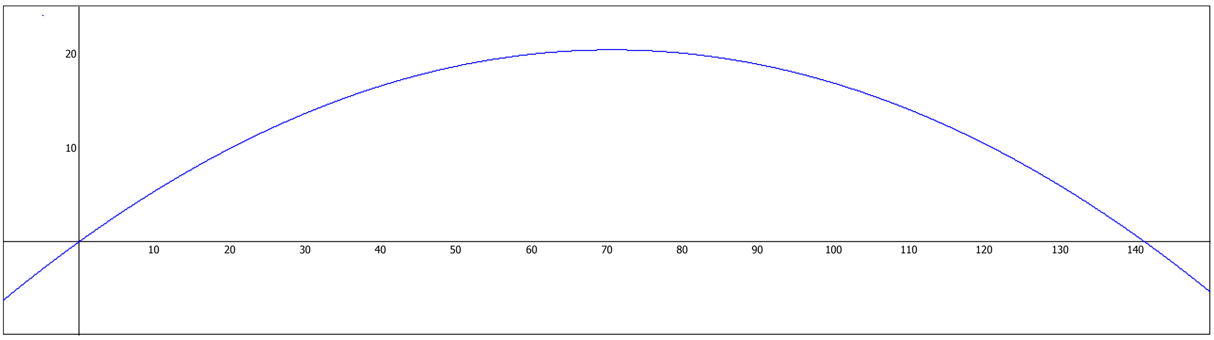
Vi ponerar att en boll kastas iväg (när vi står på jorden) med hastigheten v_0 snett framåt och uppåt. Vi kan komposantuppdela hastighetsvektorn i en horisontell och en vertikal komposant. Vi erhåller $v_{x0} = v_0 \cos\alpha$ respektive $v_{y0} = v_0 \sin\alpha$ där α är hastighetens riktning.



Om vi bortser från luftmotståndet, så verkar inga horisontella krafter på bollen, varför $a_x = 0$ och den horisontella rörelsen är likformig, d.v.s. att $s_x = v_{x0}t$. Bollens tyngd ger emellertid upphov till en acceleration $a_y = -g$ (nedåtriktad), varför $s_y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$.

$\begin{cases} s_x = v_{x0}t \\ s_y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Leftrightarrow s_y = v_{y0}\dfrac{s_x}{v_{x0}} - \frac{1}{2}g\left(\dfrac{s_x}{v_{x0}}\right)^2$, varför vi enkelt kan rita upp en graf som föreställer bollens färd genom rummet.

Om vi låter $\alpha = 30°$ och $v = 40\,\text{m/s}$ så erhåller vi grafen nedan.



Vi kan med enkel ekvationsräkning finna att bollen landar drygt 140 meter längre bort samt att kastet tar drygt fyra sekunder. (Solvera $s_y = 0$ med avseende på *t*.)

Maximal kastlängd

Vilken kastvinkel α ger maximal kastlängd s_x?

Vi vet att bollen landar där $s_y = 0$.

$$s_y = v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = t\left(v_{y0} - \tfrac{1}{2}gt\right) = 0$$

$$t = 0 \text{ eller } v_{y0} - \tfrac{1}{2}gt = 0$$

$$v_{y0} - \tfrac{1}{2} gt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2v_{y0}}{g}$$

Tiden för hela kastet är således $t = \dfrac{2v_{y0}}{g}$.

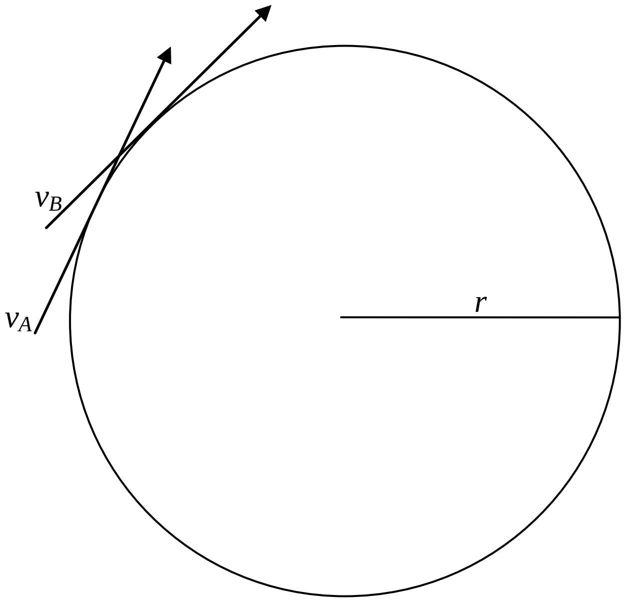
Vi vet att $s_x = v_{x0}t = v\cos\alpha \cdot \dfrac{2v\sin\alpha}{g} = \dfrac{v^2}{g} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{v^2}{g}\sin 2\alpha$

$$\frac{ds_x}{d\alpha} = \frac{2v^2}{g} \cdot \cos 2\alpha$$

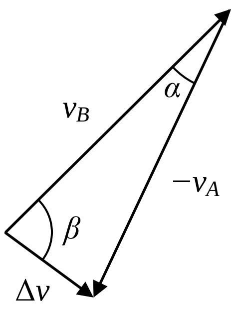
Emedan $\dfrac{2v^2}{g} > 0$ måste $\dfrac{ds_x}{d\alpha} = 0$ när $\cos 2\alpha = 0$. Eftersom $\alpha \in [0°, 90°]$ måste $2\alpha = 90° \Leftrightarrow \alpha = 45°$. Vi inser att detta utgör ett maximum för s_x eftersom $\dfrac{ds_x}{d\alpha}$ är positivt för $\alpha < 45°$ och negativt för $\alpha > 45°$. Maximal kastlängd erhålls således när kastvinkeln är 45°, d.v.s. när de båda ursprungliga hastighetskomposanterna är lika stora.

Cirkelrörelser

Ett föremål som rör sig i en cirkelformad bana med konstant fart har ändå en acceleration eftersom hastigheten, närmare bestämt dess riktning, ändras. Vi inser också detta av Newtons andra lag, ty föremålet skulle röra sig rätlinjigt om ingen resultantkraft verkade på det. Denna acceleration benämns *centripetalaccelerationen*, och den kraft som ger upphov till denna benämns *centripetalkraft*. Riktningsförändringen per tidsenhet blir givetvis större för kortare banradier och större för högre hastigheter. Rimligtvis borde alltså centripetalaccelerationen vara en funktion av både banradien och -hastigheten. Vi vill nu finna centripetalaccelerationens riktning och storlek. För att åstadkomma detta använder vi definitionen av acceleration, $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

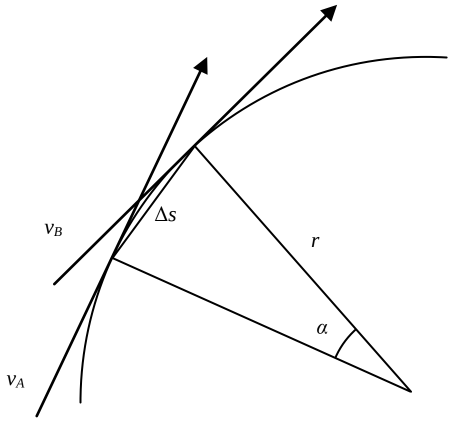


Låt hastigheten vara v_A vid tiden t_A och v_B vid tiden t_B. Vi får då att $\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$.



α är vinkeln mellan de båda hastighetsvektorerna. Enligt uppgift är $|v_A| = |v_B|$, varför vi erhåller en likbent triangel enligt figuren ovan. När $\Delta t \to 0$ så går hastigheternas riktningar mot varandra, vilket innebär att $\alpha \to 0$. Triangelns vinkelsumma medför då att $\beta \to 90^\circ$, d.v.s. att $\Delta v \perp v_B$. Eftersom v_B är tangent till cirkelbanan måste då Δv vara en normal till denna, och måste således peka rakt in mot origo. Accelerationen $a = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\Delta v \cdot \frac{1}{\Delta t}\right)$ är en skalärprodukt av vektorn Δv och får därför samma riktning som Δv.

Vi förstorar den delen av cirkeln ovan, som innehåller tangenterna v_A och v_B och markerar vektorn Δs.



Den uppkomna triangeln är likbent och har samma toppvinkel som triangeln ovan, varför dessa tydligen är likformiga. Därför måste $\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v}{r}$.

$$\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v}{r} \Leftrightarrow \frac{\Delta v}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

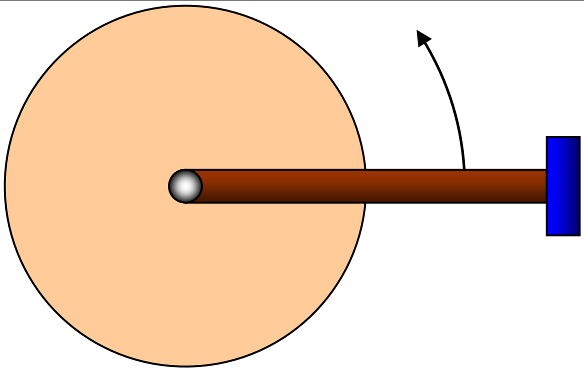
Eftersom $\frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t} \to \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}$ när $\Delta t \to 0$ så har vi visat att $a = \frac{v^2}{r}$.

Vi sammanfattar: Om en kropp rör sig längs en cirkelbana med konstant banhastighet är centripetalaccelerationen $a = \frac{v^2}{r}$ och pekar rakt in mot banans origo.

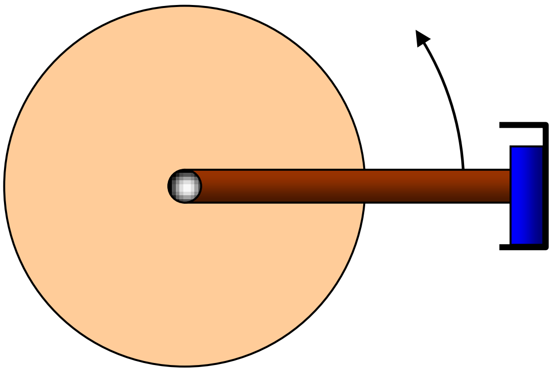
Kraften som orsakar centripetalaccelerationen benämns centripetalkraft och är enligt Newtons andra lag lika med $F = m\frac{v^2}{r}$, där m är föremålets massa; vilken typ av kraft som orsakar centripetalaccelerationen varierar från fall till fall.

Exempel 22

Vi bortser från gravitationskrafter. Ett blått paket är fastsatt med klister på en roterande axel enligt figuren nedan. Paketets tyngdpunkt följer en cirkelbana med konstant banhastighet.



Det är elektriska krafter från klistret som håller kvar paketet i cirkelbanan, d.v.s. verkar som centripetalkrafter. Om paketet istället är fastbundet med tygband, är det krafter från banden som håller kvar paketet. Om paketet istället ligger i en inåtvänd hållare (se figur nedan) är det normalkrafter från hållaren som agerar centripetalkrafter.



Det är givetvis resultantkraften på ett föremål i cirkelbana som agerar centripetalkraft. Om vi räknar med gravitationen så verkar denna i samma riktning som centripetalaccelerationen när paketet är överst i banan, varför normalkrafterna där blir mindre. Nederst i banan verkar gravitationen åt motsatta hållet, varför normalkrafterna där måste bli större. Om man skulle sitta på hållaren i illustrationen ovan skulle man således känna sig lättare överst i banan och tyngre nederst i banan. På ungefär samma sätt fungerar sambandet mellan normalkraft och resultantkraft när man åker hiss. När hissen accelererar uppåt verkar resultantkraften och gravitationskraften i motsatta riktningarna, varför normalkraften blir större och man känner sig tyngre. När hissen accelererar nedåt verkar resultantkraften och gravitationen i samma riktning, varför normalkraften blir lägre och man känner sig lättare.

Exempel 23

En bil kör över ett backkrön med konstant banhastighet. Rörelsen som bilens färd beskriver kan vid toppen approximeras med en cirkelbåge med radien 50 m. Vid vilken hastighet lättar bilen precis från vägen när den når toppen av krönet?

Lösning:

Det är gravitationskraften som agerar centripetalkraft på bilen när den kör över backkrönet. På bilen verkar normalkraften F_N från vägen och gravitationskraften F_G. Resultanten av dessa är centripetalkraften F. Vi väljer positiv riktning nedåt, varför $F_G = mg > 0$, $F > 0$ och $F_N \leq 0$.

$$F = F_G + F_N = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow F_N = m\frac{v^2}{r} - mg$$

Att bilen precis lättar, innebär att ingen normalkraft från vägen verkar på det, d.v.s. att $F_N = 0$. Detta ger $m\frac{v^2}{r} = mg \Leftrightarrow v = \sqrt{gr}$. Vi ser att gränshastigheten inte beror på bilens massa, och, vilket är rimligt, att gränshastigheten blir högre för mindre påtagliga backkrön (större radie) och större gravitationsfältstyrka. Med alla värden insatta erhåller vi $v \approx 22\,\text{m/s} \approx 80\,\text{km/h}$.

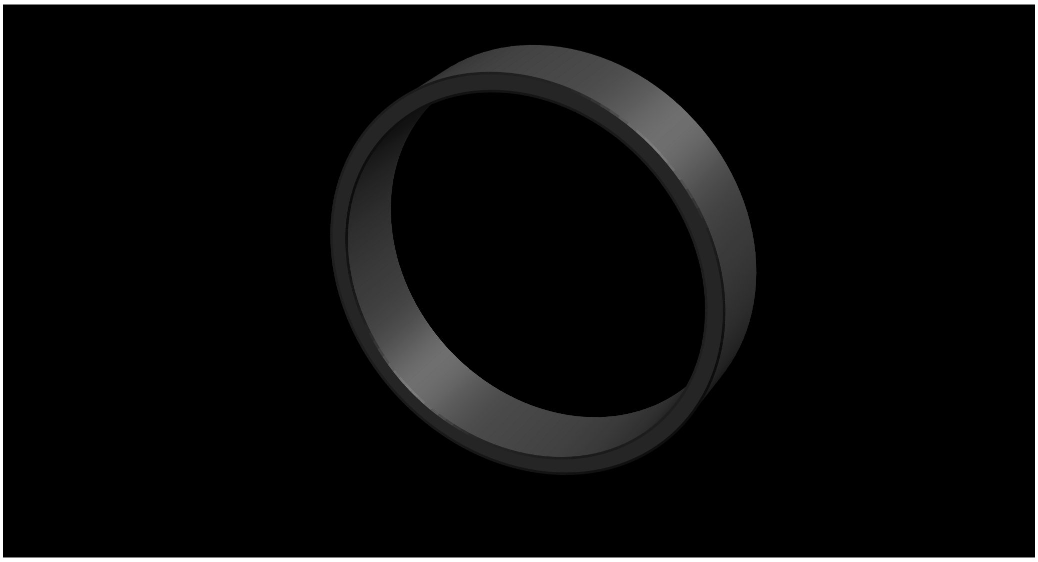
Svar: Bilen lättar precis från vägen när hastigheten är 80 km/h. Vid hastigheter över denna gränshastighet, kommer bilen att lyfta från vägen när den kör över backkrönet.

Anmärkning:

Om bilen lyfter från vägen kommer det inte längre att följa cirkelbanan, varför formeln $F = m\frac{v^2}{r}$ inte längre kan användas för beräkningar på den.

Exempel 24

Antag att vi vill bygga en rymdstation och vill skapa en känsla av tyngdkraft. Detta gör dels att vi enklare kan röra oss i stationen och dels att rörelseapparaten inte tar lika stor skada. Rymdstationen byggs som en ihålig cylinder som roterar runt sin egen axel. Golvet på stationen är längs cylinderns yttre mantelyta. (Yttre) radien på stationen är $r = 400\,\text{m}$. Vi önskar uppleva samma gravitationsfältstyrka som när vi går på jordens yta, d.v.s. 9,82 N/kg. Med vilken hastighet v måste då stationens yttre yta rotera, och med vilken rotationshastighet ω (radianer/sekund) måste alltså stationen rotera?



Lösning:

Att den upplevda gravitationsfältstyrkan på alla kroppar ska vara lika med 9,82 N/kg innebär att centripetalkraften på samtliga kroppar vid ytterkanten på stationen ska vara $F = 9{,}82m$ där *m* är respektive kropps massa. Emedan $F = ma$ måste centripetalaccelerationen $a = 9{,}82\ \mathrm{m/s^2}$.

$$a = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{ar}$$

Med värdena insatta erhåller vi $v \approx 62\ \mathrm{m/s} \approx 223\ \mathrm{km/h}$.

Rotationshastigheten $\omega = \dfrac{\theta}{t} = \dfrac{2\pi}{O/v} = \dfrac{2\pi}{2\pi r/v} = \dfrac{v}{r} \approx 0{,}16\ \mathrm{radianer/s}$

Svar: Stationen måste rotera kring sin egen axel med rotationshastigheten[2] 0,16 radianer/s.

[2] Begreppet *rotationshastighet* är synonymt med begreppet *vinkelhastighet*.

Rörelsemängd

Vi har tidigare definierat storheten energi som produkten av kraft och sträcka. Beräkningar med storheten energi har den fördelen att den totala energimängden inte kan förändras – ”energi kan varken skapas eller förintas”. Vi skall nu göra ytterligare en definition.

För en kropp med massan *m* och hastigheten *v* definierar vi *rörelsemängden p* enligt

$$p = mv.$$

Enheten för rörelsemängd blir således kilogrammeter per sekund (kgm/s). Vi ser också att rörelsemängd är en vektorstorhet med samma riktning som hastigheten. Vi skall se att även denna storhet har beräkningsmässiga fördelar.

Impuls

Om en kraft *F* verkar på ett föremål under en tid *t*, säger vi att föremålet får en *impuls I*, definierad av

$$I = Ft.$$

Storheten impuls får således enheten newtonsekunder (Ns) och är en vektorstorhet med samma riktning som kraften. Vi skall nu se att det finns ett enkelt samband mellan förändringen av ett föremåls rörelsemängd och en impuls som verkar på föremålet.

Låt föremålet *A* ha massan *m* och hastigheten v_1. En konstant kraft *F* verkar på föremålet under tiden *t*, vilket ger upphov till en konstant acceleration *a* som ökar *A*:s hastighet till v_2. Då är förändringen i rörelsemängd $\Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) = m \cdot \Delta v = mat = Ft = I$.

Vi ser att en impuls på ett föremål förändrar föremålet rörelsemängd, och dessutom att impulsen precis är lika med förändringen i rörelsemängd, $I = \Delta p$.

Enhetsmässigt inser vi att $1\,\text{kgm/s} = 1\,\text{Ns}$, vilket vi också direkt inser genom att $1\,\text{N} = 1\,\text{kgm/s}^2$, enligt definitionen av kraft.

Bevarande av rörelsemängd

Betrakta två föremål *A* och *B*. Dessa har massorna m_A respektive m_B och hastigheterna v_A respektive v_B. Deras rörelsemängder är $p_A = m_A v_A$ respektive $p_B = m_B v_B$. Ponera att föremålen svävar fritt i rymden, och att de är på kollisionskurs mot varandra. Vid kollisionen verkar *A* på *B* med en kraft *F*, och enligt Newtons tredje lag verkar då *B* på *A* med kraften −*F*. Kollisionen varar under tiden *t* och efter kollisionen har föremålen hastigheterna u_A respektive u_B.

Impulsen på föremål *B* blir $I_B = Ft$ medan impulsen på föremål *A* blir $I_A = -Ft$. Den sammanlagda rörelsemängden före kollisionen var $p_{före} = m_A v_A + m_B v_B$, och den nya rörelsemängden efter kollisionen blir
$p_{efter} = m_A u_A + m_B u_B = (m_A v_A - Ft) + (m_B v_B + Ft) = m_A v_A + m_B v_B = p_{före}$.

Vi ser att rörelsemängden har *bevarats*. Detta resultat gäller generellt för system, om inga yttre krafter verkar på systemen. Detta är fördelen med att räkna med rörelsemängd. Alltså:

Om inga yttre krafter verkar på ett system, så är systemets totala rörelsemängd (d.v.s. vektorsumman av samtliga i systemet ingående föremåls rörelsemängder) konstant. (Bevarandelagen för rörelsemängd)

Exempel 25

Två stenar rör sig fritt i ett rymdskepp. De har massorna $m_A = 2\,\text{kg}$ respektive $m_B = 1\,\text{kg}$ och rör sig rakt mot varandra med hastigheterna $v_A = 2\,\text{m/s}$ respektive $v_B = -3\,\text{m/s}$ längs den räta linjen mellan föremålet. Deras totala rörelsemängd före kollisionen är $p_{före} = 1\,\text{kgm/s}$. Enligt bevarandelagen för rörelsemängd blir då den totala rörelsemängden efter kollisionen lika med $p_{efter} = 1\,\text{kgm/s}$. Emedan ekvationen $p_{efter} = m_A u_A + m_B u_B$ innehåller två obekanta, nämligen sluthastigheterna u_A och u_B, kan vi inte bestämma dessa utan ytterligare information.

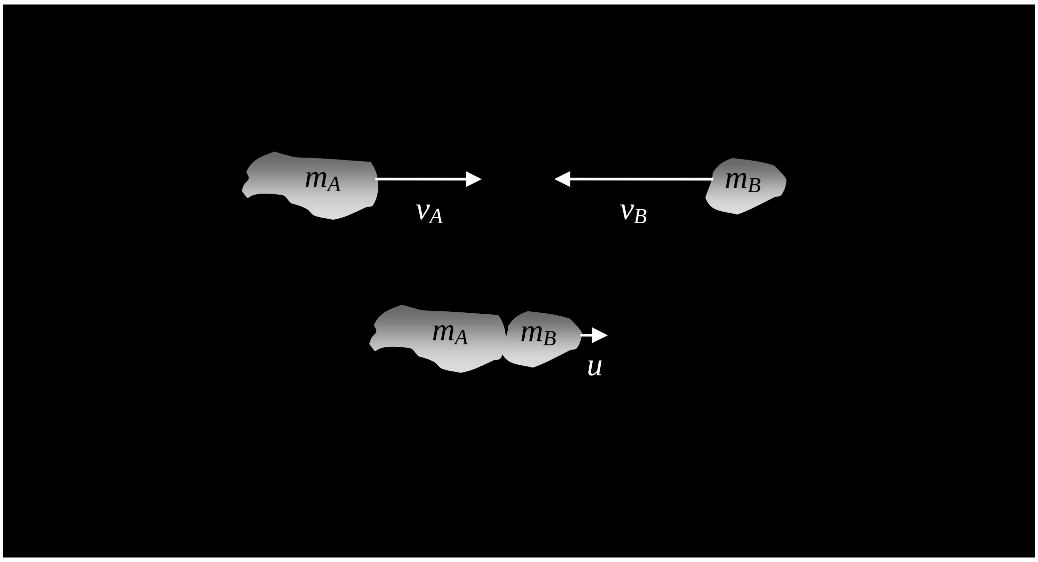
Om vi emellertid känner en av hastigheterna, kan vi däremot beräkna den andra genom att luta oss mot bevarandelagen. Ett speciellfall är när två föremål *hänger samman* efter kollisionen. Då är $u_1 = u_2$ och vi har endast en okänd variabel.

Exempel 26

De två stenarna från exempel 25 hänger samman efter kollisionen. Med vilken hastighet rör de sig?

Lösning:

$$p_{efter} = m_1 u + m_2 u = 1\,\text{kgm/s}$$
$$u = \tfrac{1}{3}\,\text{m/s}$$



Svar: Stenarna rör sig med hastigheten $u = \tfrac{1}{3}\,\text{m/s}$ i samma riktning som A hade före kollisionen.

Vid en kollision inom ett system som inte påverkas av någon yttre resultantkraft bevaras alltså rörelsemängden. Däremot är det inte säkert att den mekaniska energin bevaras. I exemplet ovan minskar den kinetiska energin från 8,5 J till 0,1666… J (vi erhåller termisk energi).

Relativitetsteori

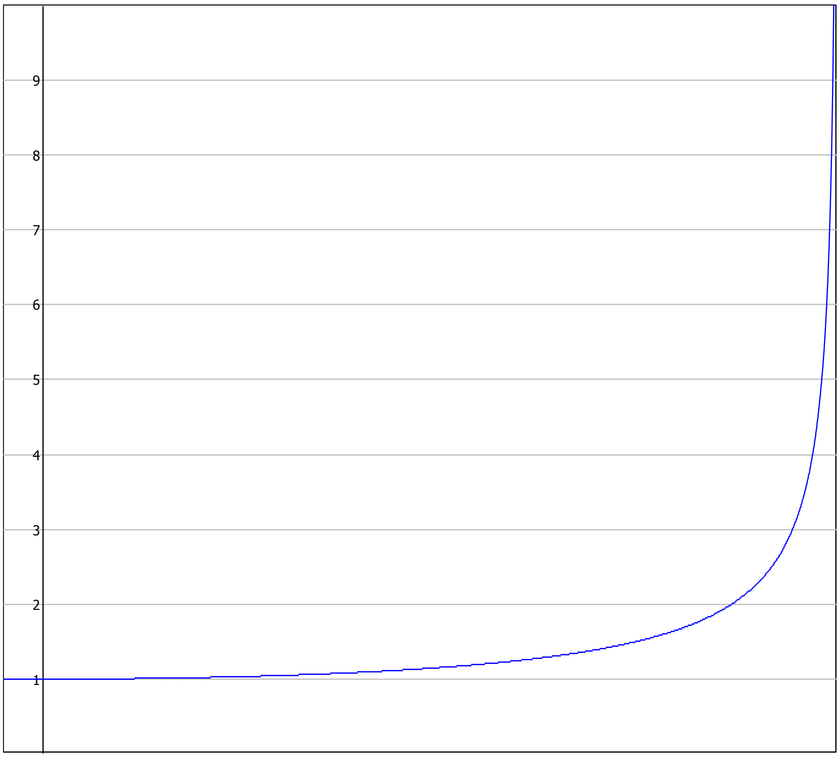
De matematiska modeller vi beskrivit i denna uppsats är egentligen endast approximationer av mer generella (och något mer komplicerade) modeller. Emellertid är dessa approximationer mycket goda när föremål rör på sig med hastigheter som är mycket lägre än ljusets hastighet $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$.

Man kan tämligen enkelt resonera sig fram till att tiden inte alltid går lika fort, om man utgår från vissa observationer av elektromagnetisk strålning (ljus). Låt *A* vara en observatör i ett ”fordon” som färdas med en hastighet *v* i förhållande till en observatör *B* utanför fordonet. En process som *A* uppfattar tar tiden t_A, uppfattar *B* som att den tar tiden t_B. Intuitivt skulle nog de flesta människor anse att $t_A = t_B$. Så är emellertid inte fallet, utan $t_B > t_A$. Mer precist gäller att

$$t_B = \gamma t_A$$

där *Lorentsfaktorn* $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. Vi inser att $\gamma \approx 1$ när $v << c$, d.v.s. i nästan alla vardagliga situationer. I nästan alla vardagliga situationer gäller alltså, vilket tillfredställer intuitionen, att $t_A \approx t_B$.

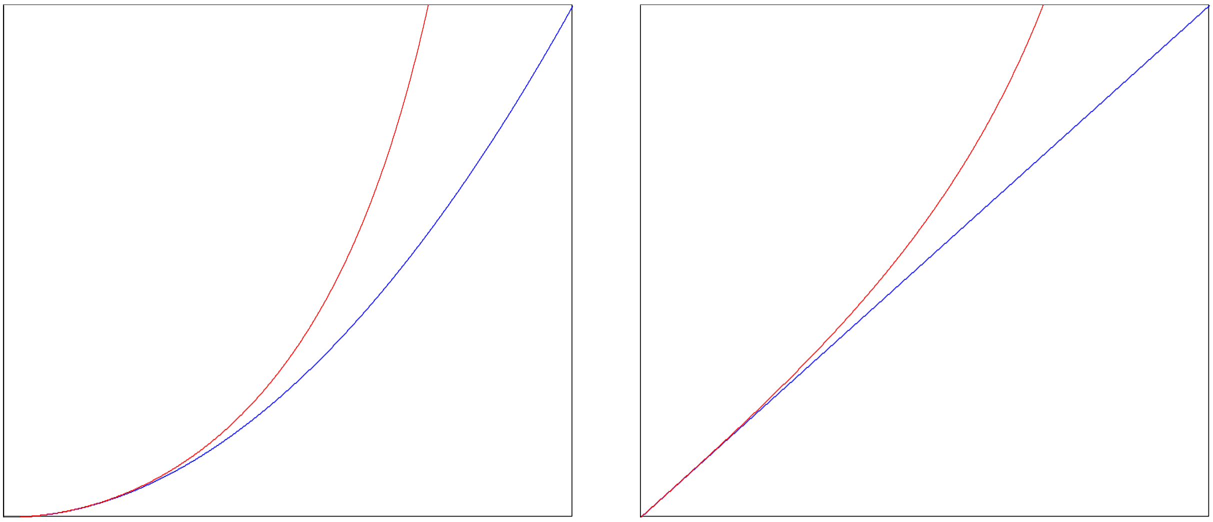
För att få en uppfattning av funktionen $v \mapsto \gamma$ för $v \in [0, c[$ använder vi AlgoSim för att rita upp dess graf.



Vi ser att den klassiska mekanikens approximationsfel i de flesta applikationer torde vara försumbara även för mycket höga hastigheter *v*. För hastigheter som närmar sig *c*, emellertid, måste vi använda de mer generella, de så kallade *relativistiska*, modellerna. Utan att gå in på några härledningar ska vi här presentera ett par vanliga relativistiska formler.

- Den kinetiska energin $E_k = mc^2(\gamma - 1)$
- Rörelsemängden $p = \gamma mv$

Om $v << c$ så gäller att $mc^2(\gamma - 1) \approx \frac{1}{2}mv^2$ och $\gamma mv \approx mv$, d.v.s. de klassiska approximationerna gäller med god precision. Vi kan rita upp graferna till funktionerna $v \mapsto E_k$ samt $v \mapsto p$ för $v \in [0, c[$, både med de klassiska och med de relativistiska uttrycken, för att jämföra dem. Vi sätter $m = 1\,\text{kg}$.



De klassiska uttryckens funktionsvärden ritas upp med blåa punkter och de relativistiskas med röda.

Exempel 27

Kan ett föremål färdas med en hastighet som är högre än ljusets?

Lösning:

Den relativistiska formeln för kinetisk energi lyder $E_k = mc^2(\gamma - 1)$, men $E_k \to \infty$ då $v \to c$. Det betyder att det skulle krävas ett oändligt stort arbete för att accelerera ett föremål till ljusets hastighet.

Laborationer

Vi har tidigare betraktat en fysiker som en sanningssökare. Målet med de matematiska modeller vi använt i uppsatsen är att de ska återspegla *verkligheten*. Det bästa sättet att bekräfta att de verkligen gör det på, är att pröva dem, att *laborera*. Många sådana laborationer kan utföras enkelt i hemmiljö. Som exempel på ett sådant test, tar vi fritt fall.

Laboration 1 – Fritt fall

En vikt med massan $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$ släpps från höjden $h = 2{,}35\,\mathrm{m}$ och får sedan falla fritt i ett rum, bortsett från luftmotståndet, som torde vara väldigt litet i sammanhanget. Vi ska först teoretiskt beräkna hur lång tid fallet bör ta, för att sedan jämföra med hur lång tid fallet tar när vi testar det i verkligheten.

Teoretiskt erhåller vi $h = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{2h/g} = 0{,}6918...\,\mathrm{s}$.

Försöket upprepades 14 gånger, och medelvärdet av samtliga uppmätta falltider blev 0,69 sekunder. Vi har därmed bekräftat teorin.

Laboration 2 – Centripetalkraft som motverkar tyngdkraft

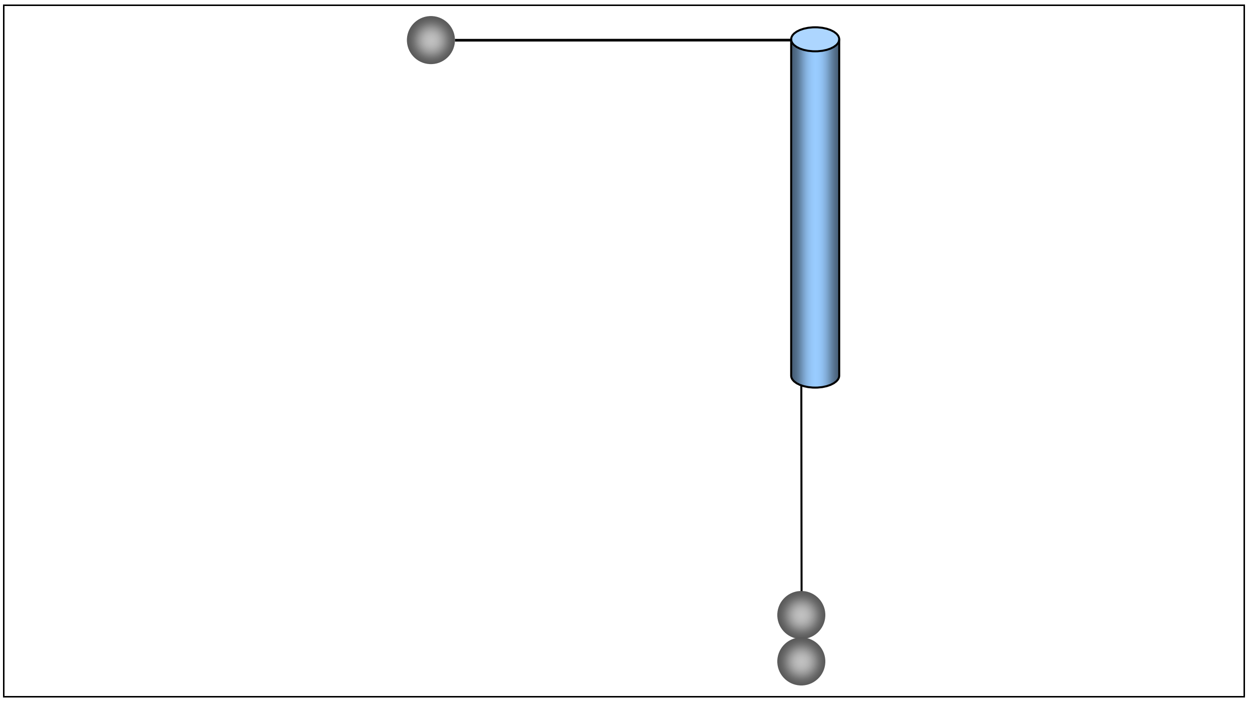
En tyngre och en lättare vikt är fästa i var sin ände av en tunn tråd. Tråden är trädd genom ett rör med jämna, avrundade kanter. Vi håller röret i handen och svänger det över huvudet så att den lättare viktens rörelse beskriver en plan, horisontell cirkel med konstant banhastighet. Fart och radie avpassas så att den tyngre vikten, som hänger rakt ner, är i jämvikt (d.v.s. saknar vertikal hastighet och acceleration).

Bestäm förhållandet mellan massorna av de båda vikterna.

Den lättare vikten har en centripetalacceleration och således också en centripetalkraft, som utgörs av den tyngre viktens tyngdkraft.

Centripetalkraften $F_c = m_1 a = m_1 \frac{v^2}{r} = m_1 \frac{(s/t)^2}{r} = m_1 \frac{(2r\pi/t)^2}{r} = \frac{4 m_1 r \pi^2}{t^2}$ där $t = 0{,}9\,\mathrm{s}$ och $r = 0{,}38\,\mathrm{m}$ medan den tyngre viktens tyngdkraft $F_G = m_2 g$. Likheten $F_c = F_G$ är ekvivalent med att $\frac{m_2}{m_1} = \frac{4r\pi^2}{t^2 g} \approx 1{,}9$.

I praktiken bestod den tyngre vikten av två stycken sammansatta lättare vikter, varför förhållandet m_2/m_1 borde ha varit omkring 2. Mätningen uppvisar således ett relativt fel på cirka 5,7 %, vilket får ses som fullt acceptabelt med hänsyn till de praktiska svårigheterna som föreligger vid exekvering av experimentet. Vi anser att detta bekräftar teorin.



Avslutning

Vi har i denna uppsats gett en enkel introduktion till den klassiska mekanikens modeller för att beskriva verkligheten, med vilka vi kan utföra beräkningar på mycket i universum. Vi har också studerat modellernas begränsningar och jämfört modellerna med mer generella sådana, samt betonat vikten av att laborera för att bekräfta att teorier verkligen är användbara och stämmer med verkligheten.