Matematiskt språk

Innehållsförteckning

Inledning

Matematiska resonemang ska alltid vara stringenta. Det ska med andra ord aldrig föreligga någon tveksamhet kring vad som egentligen menas, och de slutsatser man kommer fram till ska alltid vara helt säkra. För att lyckas med att beskriva objekt och företeelser på ett stringent sätt, kan det vara fördelaktigt att använda det väldefinierade matematiska symbolspråket. Vi ska i denna uppsats introducera begreppen *mängder* och vissa delar av *logiken*.

Mängder

I många fall kan det vara naturligt att studera objekt genom att dela in dem i ”samlingar”. Vardagliga exempel på detta kan vara en kursklass, invånarna i en kommun eller frukterna i en livsmedelsaffär. Dessa ”samlingar” benämns inom matematiken *mängder*, och de ingående objekten kallas *element*.

Att uttrycka en mängd

En mängd kan enklast uttryckas genom att de i mängden ingående elementen listas upp inom klammerparenteser med kommatecken som avgränsare. Om vi låter mängden *A* bestå av elementen *a*, *b* och *c* så skriver vi följaktligen

$$A = \{a, b, c\}.$$

Exempel 1

$$\text{veckodagar} = \{\text{måndag, tisdag, onsdag, torsdag, fredag, lördag, söndag}\}$$

$$\text{planeter} = \{\text{Merkurius, Venus, Tellus, Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus, Neptunus, Pluto}\}$$

$$\text{väteisotoper} = \{{}^1_1\text{H}, {}^2_1\text{H}, {}^3_1\text{H}\}$$

Det finns en mängd som inte innehåller några element alls. Den kallas *tomma mängden* och betecknas $\varnothing$.

Exempel 2

Mängden av de planeter i universum, förutom jorden, vilka människan år 2005 helt säkert visste inhyste levande organismer är lika med $\varnothing$.

Två mängder säges vara lika om och endast om de innehåller samma element. Ordningen i vilken elementen räknas upp, samt eventuella upprepningar av ett och samma element, är dock inte av betydelse. Om exempelvis

$$A = \{a, b, c\}$$

och

$$B = \{c, b, a, a\}$$

så innehåller *A* och *B* samma element, varför det gäller att $A = B$.

Antalet element i en mängd *A* skrives $|A|$. I exemplen ovan gäller alltså att $|A| = |B| = 3$.

Beteckningar

Att ett enskilt element a ingår i mängden A skrives

$a \in A$ ("a ingår i A").

Att ett enskilt element a inte ingår i mängden A skrives vidare

$a \notin A$ ("a ingår inte i A").

Exempel 3

Vi har att

$\text{måndag} \in \text{veckodagar}$,
$\text{Tellus} \in \text{planeter}$ samt
${}^{2}_{1}\text{H} \in \text{väteisotoper}$.

Vi har vidare att

$\text{januari} \notin \text{veckodagar}$,
$\text{ISS} \notin \text{planeter}$ och
${}^{4}_{2}\text{He} \notin \text{väteisotoper}$

Exempel 4

Mängden av lösningar till ekvationen

$x^2 = 4$

är $\{-2,2\}$.

Vi kan skriva detta som att $x \in \{-2,2\}$.

Olika talsystem

En mycket vanlig mängd är mängden av *de naturliga talen*, vilken betecknas N. Eftersom det finns oändligt många naturliga tal, måste vi använda en kortform för att beskriva N.

$N = \{0,1,2,3,4,5,...\}$

En annan vanlig mängd är mängden av alla *heltal*, Z.

$Z = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,5,-5...\}$

Ibland används beteckningen Z^+ för mängden av alla *positiva heltal* och Z^- för mängden av alla *negativa heltal*.

$Z^+ = \{1,2,3,4,5...\}$
$Z^- = \{-1,-2,-3,-4,-5...\}$

Mängderna *N*, *Z*, Z^+ och Z^- ovan utgör olika *talsystem*. Det mest generella av dessa talsystem, *Z*, räcker dock inte för att lösa alla problem. Om exempelvis fem personer ska dela på sju liter vatten, så kan inte antalet liter vatten som varje person får uttryckas i *Z*. Vi behöver därför införa ännu generellare talsystem.

Mängden av *de rationella talen* består av alla tal som kan skrivas på formen p/q där $p \in Z$ och $q \in Z$ fast $q \neq 0$. Denna mängd betecknas *Q*. Mängder som beskrivs som alla objekt av en viss ”typ” och som uppfyller ett visst villkor kan anges genom att ”typen” och villkoret anges med kolon emellan. Vi kan således beteckna *Q* med

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in Z, q \neq 0 \right\}.$$

Alla heltal är rationella tal. (Sätt $q = 1$.) Men även 0,5 (=1/2), 0,123456 (=1929/15625), 10,991 (=10991/1000), 0,33333333… (=1/3) och 0,28571428571428… (=2/7) är exempel på rationella tal. Det som utmärker rationella tal är att deras decimalutveckling antingen är ändlig eller periodisk. Man kan alltså alltid ange ett exakt värde på ett rationellt tal genom att endast använda siffror och eventuellt ett decimalkomma.

Att en decimalutveckling är periodisk, som i fallet med utvecklingen för 2/7 (där 285714 upprepas i oändlighet) kan anges genom att de upprepade siffrorna ovanstrykes. Till exempel är

$$2/7 = 0,\overline{285714}.$$

Samtliga tal på tallinjen är inte rationella. Talet π, d.v.s. förhållandet mellan en cirkels omkrets och diameter, kan exempelvis inte skrivas på formen p/q om $p \in Z$ och $q \in Z$. Mängden av alla möjliga tal på talaxeln benämns mängden av *de reella talen*, och betecknas *R*. Till mängden av de reella talen hör alltså alla rationella tal (och därmed också alla heltal) samt irrationella tal såsom π, *e* och $\sqrt{2}$ (diagonalen av en kvadrat med sidan 1). Ett irrationellt tal kan aldrig anges exakt med endast siffror och decimalkomma. Istället används *symboler*, som de ovan. Man kan dock göra en rationell *approximation* av ett irrationellt tal. Till exempel gäller att

$$\pi \approx 3,14159265358979324,$$

$$e \approx 2,71828182845904524 \text{ samt}$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237309505.$$

Intervall

Mängden av alla reella tal *x* sådana att $a < x < b$ kan kortfattat skrivas $]a,b[$. Om istället $a \leq x < b$ skriver vi $[a,b[$; om $a < x \leq b$ skriver vi $]a,b]$ och om $a \leq x \leq b$ skriver vi $[a,b]$. Dessa mängder kallas *intervall*. Vi inser att $R =]-\infty,+\infty[$. Om exempelvis $a \leq x \leq b$ så kan vi alltså skriva att $x \in [a,b]$ (”*x* tillhör intervallet *a* till *b*”).

Primtal

Ett primtal är ett tal n sådant att $n \in N$, $n \geq 2$ och n inte kan divideras med något annat heltal än n och 1 så att kvoten också blir ett heltal. Ett primtal är med andra ord ett tal som endast är ”jämnt delbart” med sig självt och 1. Om P är mängden med alla primtal så gäller alltså att

$$P = \{n : n \in N, n \geq 2, n/k \notin Z \text{ för alla } k \in Z^+, k \notin \{1, n\}\}$$

Delmängder

Låt A och B vara två mängder. Om alla element i A också är element i B, så säger vi att A är en *delmängd* av B, vilket skrives

$A \subseteq B$ eller $B \supseteq A$,

varav det senare uttalas ”B omfattar A”.

Märk att påståendet ovan tillåter att $A = B$. Om vi vet att så inte är fallet, d.v.s. att B innehåller element som inte finns i A, så säger vi att A är en *äkta* delmängd av B. Detta skrives

$A \subset B$ eller $B \supset A$.

Exempel 5

Om vi som exempel sätter

$$\text{helgdagar} = \{\text{lördag, söndag}\}$$

så gäller att

$$\text{helgdagar} \subseteq \text{veckodagar}$$

och mer precist att

$$\text{helgdagar} \subset \text{veckodagar}.$$

Vi inser att det för talsystemen gäller att $Z^+ \subset N \subset Z \subset Q \subset R$. Vi inser också att det för en godtycklig mängd A gäller att $A \subseteq A$ och $\varnothing \subseteq A$.

Union och snitt

Låt A och B vara två mängder, och låt mängden C innehålla alla de element som ingår i A plus alla de element som ingår i B. Då säger vi att C är *unionen* av A och B, vilket skrives

$C = A \cup B$.

Låt vidare mängden D innehålla alla de element vilka ingår i *både* A och B. Då säger vi att D är *snittet* av A och B. Detta skrives

$D = A \cap B$.

Exempel 6

Låt $A = \{1,2,3,4\}$ och $B = \{3,4,5,6\}$.

Då är

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

och

$A \cap B = \{3,4\}$.

Exempel 7

Låt $A = \{1,2,3\}$ och $B = \{4,5,6\}$.

Då är

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

och

$A \cap B = \varnothing$.

Exempel 8

I en forskningsgrupp i fysik ingår 20 personer. Av dessa är några villiga att arbeta som undervisare och några är experter på rymdteknik. Beteckna med *A* mängden av dem som är villiga att undervisa och med *B* mängden av dem som är experter på rymdteknik.

Vid ett tillfälle ska en grupp elever undervisas i rymdteknik och forskningsgruppen har fått i uppgift att ställa upp med undervisare, fast endast med experter på området. Mängden av de möjliga undervisarna är då lika med $A \cap B$.

Differens

Låt *A* och *B* vara två mängder. Om mängden *C* innehåller alla element som finns i *A* förutom de som eventuellt också finns i *B*, så säger vi att *C* är (mängd-) differensen av *A* och *B* och vi skriver

$C = A - B$ eller

$C = A \setminus B$.

Vi inser att det för alla mängder *A* gäller att $A - \varnothing = A$ och $A - A = \varnothing$.

Exempel 9

Låt A vara mängden av elever i en skolklass. Vid ett tillfälle är några av eleverna på studieresa, medan de andra får arbeta fritt. Beteckna mängden av dem som är på studieresa med B. Då är $B \subseteq A$. Beteckna mängden av dem som får arbeta fritt med C. Då är $C = A - B$

Exempel 10

Låt A vara mängden av alla som arbetar på ett universitet och låt B vara mängden av alla professorer. Den övriga personalen på universitetet utgör då mängden $A - B$.

Universum och komplementmängd

Om vi vid ett visst tillfälle betraktar mängder av element och *alla* tänkbart relevanta element återfinns i mängden U så säger vi att U för tillfället är *universum* eller *grundmängd*. Om vi till exempel studerar en skolklass är det naturligt att säga att U är mängden av alla i klassen gående elever. Med *komplementet* $\complement A$ till en mängd A, sådan att $A \subseteq U$, menar vi mängden $U - A$, d.v.s. mängden av alla (för tillfället relevanta) element som *inte* finns i A.

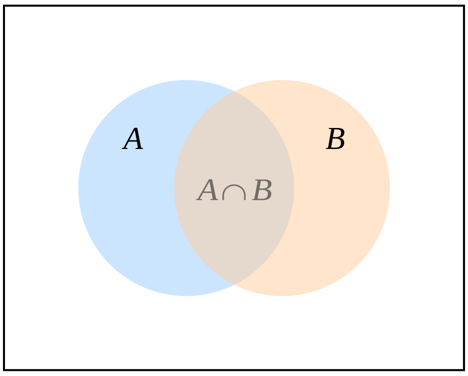
Exempel 11

Betrakta åter skolklassen från exempel 9. Som universum U sätter vi mängden av alla elever, och vi betecknar med A mängden av alla elever på studieresa. De som får arbeta fritt utgör då mängden $\complement A$.

För U som universum och en mängd A, sådan att $A \subseteq U$, inser vi att $A \cup \complement A = U$ och $A \cap \complement A = \varnothing$.

Venndiagram

För att illustrera samband mellan ett universum och dess mängder kan man med fördel använda sig av Venndiagram. Ett Venndiagram är en rektangel som motsvarar ett universum och som innehåller avgränsade områden vilka representerar olika mängder. En punkt i diagrammet är ett element och det tillhör de mängder vars områden omfattar punkten.



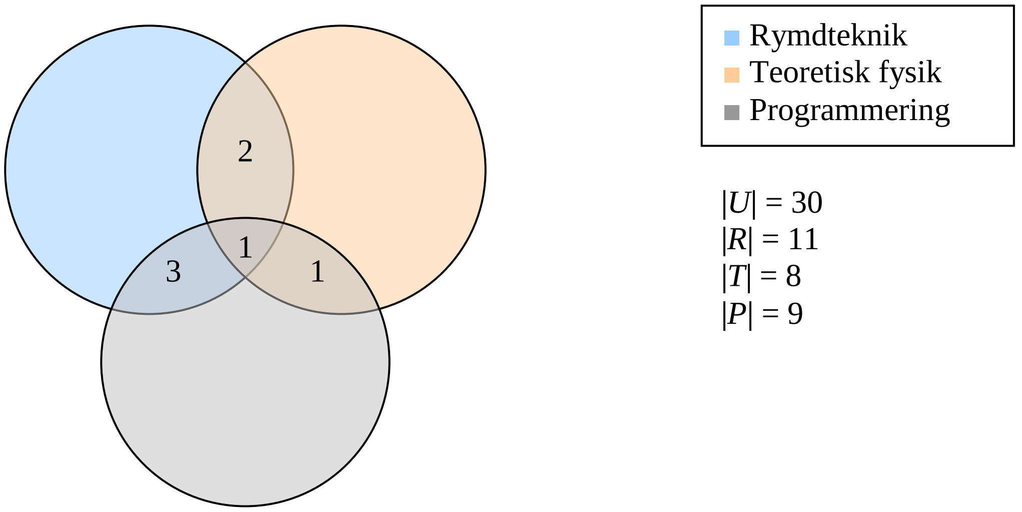
I diagrammet ovan är de två mängderna A och B markerade. Vi har även markerat snittet av mängderna. Alla punkter som tillhör en av eller båda cirklarna ingår vidare i unionen av A och B. De punkter som finns utanför båda cirklarna utgör därför mängden $\complement(A \cup B)$.

Exempel 12

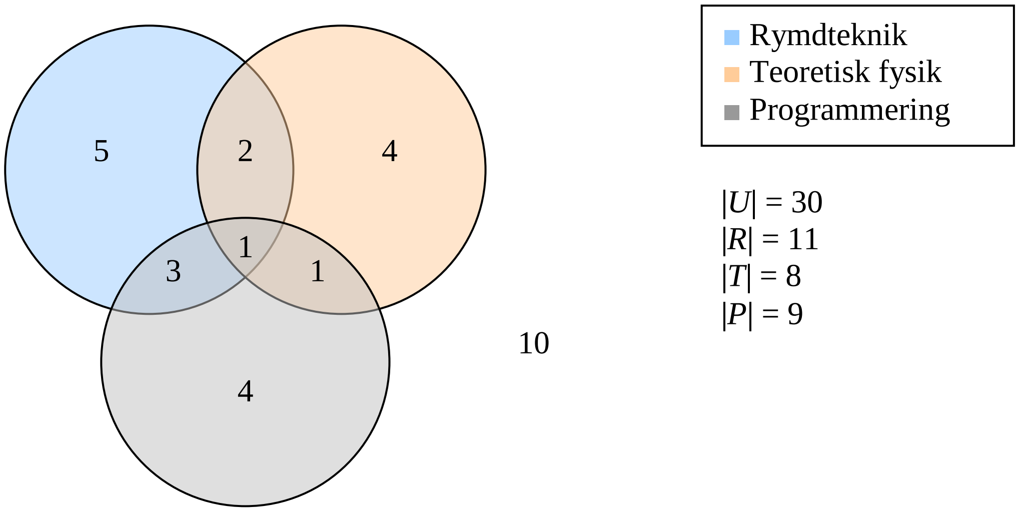
I en forskargrupp på 30 personer är 11 experter inom rymdteknik, 8 är experter inom teoretisk fysik och 9 är experter på programmering. 2 personer är experter inom både rymdteknik och teoretisk fysik (fast inte programmering), 3 personer inom både rymdteknik programmering (fast inte teoretisk fysik) och en person är expert inom både teoretisk fysik och programmering (fast inte rymdteknik). En person är expert inom alla tre områdena. De personer som inte är experter inom något ämne är undervisare. Hur många är specialiserade experter inom endast ett område och hur många är undervisare?

Lösning:

Denna uppgift löses med fördel av ett Venndiagram. Vi inför beteckningen R för mängden av experter inom rymdteknik, T för mängden av experter inom teoretisk fysik och P för mängden av experter inom programmering. Som universum U väljer vi hela forskargruppen. Vi markerar också hur många personer som hör till varje avgränsat område i diagrammet nedan.



Totalt sett är 11 personer experter inom rymdteknik. Det enda delområdet inom rymdteknikmängdens område vilket inte har fått något personantal är den del som inte utgör ett snitt med någon annan mängd. Antalet personer i denna del är således $11-3-1-2=5$. Det är alltså fem personer som är experter inom rymdteknik och som inte samtidigt är experter inom något annat område. Med analoga resonemang kan vi ange personantal till alla områden. Vi erhåller resultatet nedan.



Svar: Fem personer är experter endast inom rymdteknik, 4 endast inom teoretisk fysik, 4 endast inom programmering och 10 är endast undervisare.

Logik

Vi ska nu studera hur vi kan *formalisera* människans intuitiva uppfattning av *logik*. Logik kan definieras som vetenskapen om hur man utifrån vissa förkunskaper, *premisser*, kan komma fram till, *deducera*, nya slutsatser. Precis som för all matematik måste de härledda slutsatserna vara korrekta och entydiga.

Påståenden

Ett *påstående* är en bit information som säger något om verkligheten, och som antingen gäller (är sant) eller inte gäller (är falskt). Vi kommer att använda siffran 1 som beteckning för sant och siffran 0 som beteckning för falskt.

Exempel 13

Låt

p: ”Jorden är en planet”,
q: $5+5=15$ och
r: $2{,}5 \notin N$.

Då gäller att

$p=1$,
$q=0$ och
$r=1$.

Operatorer

För att sammanfoga flera olika påståenden till ett större och mer informativt sådant, används operatorer. En logisk operator kan betraktas som en funktion som gör om (ett eller två) sanningsvärden till ett nytt sanningsvärde.

Icke

Icke-operatorn betecknas ¬ och tar en operand och gör om denna (påståendet som kommer strax efter tecknet) till dess motsats. Värdet operatorn returnerar kallas en *negation*.

Vi kan uttrycka operatorns verkan i en *sanningstabell*.

p	¬p
1	0
0	1

Exempel 14

Låt p: ”4 är ett primtal”. Enligt definitionen av primtal får vi att $p=0$, d.v.s. att påståendet $\neg p=1$, eller i ord att ”4 är *inte* ett primtal”.

Vi inser att $\neg(\neg p)$ har samma innebörd som (*är ekvivalent med*) p, eftersom sanningsvärdena för $\neg(\neg p)$ för alla p är lika med sanningsvärdena för ursprungliga p.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
1	0	1
0	1	0

Och

Och-operatorn betecknas $\wedge$, tar två operander, och gör om dessa (påståendet före och påståendet efter) till ett nytt påstående som kallas en *konjunktion*. Det nya påståendet är sant om och endast om de *båda* ursprungliga sanningsvärdena är sanna.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exempel 15

Påståendet ”Linus är hungrig och Linus är törstig” är sant om och endast om Linus både är hungrig och törstig, ty om p: ”Linus är hungrig” och q: ”Linus är törstig” så kan hela påståendet skrivas $p \wedge q$, vilket endast är sant om och endast om $p = 1$ och $q = 1$.

Eller

Eller betecknas $\vee$ och tar två operander. Det nya påståendet kallas en *disjunktion* och är sant om *något* av de ursprungliga värdena är sant, eller om båda är sanna.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exempel 16

Påståendet ”Eleven är fysiker eller matematiker” är sant både om eleven är en fysiker och om hon är en matematiker, eller både fysiker och matematiker samtidigt. Om eleven varken är fysiker eller matematiker är påståendet emellertid falskt.

Påståendet ”Jag är en amöba eller $1+1=2$” är dock alltid sant, eftersom påståendet $1+1=2$ alltid är sant.

Exklusivt eller

Ibland menar man, när man använder *eller* i dagligt tal, att *exakt ett* av påståendena är sant, men *inte båda*. Denna logiska operator benämns *exklusivt eller* och betecknas ibland $\veebar$.

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Vi inser intuitivt att påståendet $p \veebar q$ är ekvivalent med påståendet $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$. För att mer stringent bekräfta att så är fallet, jämför vi med sanningstabellen för det senare uttrycket.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
1	1	1	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

Vi ser att sanningsvärdena alltid är lika för $p \veebar q$ och $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$, vilket var precis vad vi ville visa.

Med ”eller” i vanligt språkbruk menar man ibland logiskt eller och ibland logiskt exklusivt eller. Den matematiska logiken är alltså mer entydig än det mänskliga språket.

Exempel 17

Om en datatekniker säger att det är fel på tangentbordet *eller* programvaran så menar hon nog att använda *logiskt eller*, d.v.s. att det fel på *minst* en av faktorerna tangentbord eller programvara; det kan vara det fel på båda.

Om en patient säger till läkaren att hon vill ha ett läkemedel som administreras oralt *eller* ett läkemedel som administreras intravenöst, så menar hon nog att använda *logiskt exklusivt eller*; hon vill med andra ord sannolikt inte ha både ett oralt och ett intravenöst läkemedel.

Implikation

En *implikation* är ett påstående som anger att ett påstående är en automatisk konsekvens av ett annat påstående. På ren svenska säger vi exempelvis att

”om p så q”

vilket betyder att, om vi vet att påståendet p är sant, så vet vi också att påståendet q är sant. Med symboler skriver vi att

$p \Rightarrow q$ (”p implicerar q”; ”p medför q”; ”p leder till q”).

Detta nya påstående är sant om både p och q är sanna. Om p är sann medan q är falsk, så är påståendet inte sant, ty då har ju inte p fått följden q. Om p är falskt kan vi inte veta något om följden verkligen existerar, utan då säger vi att implikationen är sann. Sanningstabellen blir alltså som följer.

p	q	$p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exempel 18

Låt

P(x): ”x är ett primtal” och
J(x): ”x är jämnt”.

Då gäller att

$\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{J}(x) \Rightarrow x = 2$.

Vi kan också använda den bakåtvända implikationspilen $\Leftarrow$, som har samma betydelse som den framåtvända bortsett från att de två operanderna bytt plats. Vi inser intuitivt och kan också med sanningstabell enkelt visa att $p \Rightarrow q$ är ekvivalent med $\neg(p \wedge \neg q)$.

Vidare inser vi direkt att $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$, $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ och $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$ alltid gäller.

Exempel 19

Låt

p: ”Det regnar” och
q: ”Marken blir blöt”

och antag att $p \Rightarrow q$ alltid gäller.

Antag att $\neg q$. Då vet vi att $\neg p$, eller med andra ord: ”Om marken inte är blöt, så regnar det inte”.

Ekvivalens

Om vi både vet att $p \Rightarrow q$ och $q \Rightarrow p$ (d.v.s. $p \Leftarrow q$), så kan vi kortfattat skriva detta som en ekvivalens:

$p \Leftrightarrow q$

Detta betyder att p är sann om q är sann, och att q är sann om p är sann. Vidare, om p är falsk så måste också q vara falsk, och om q är falsk så må måste också p vara falsk. p och q har alltså alltid samma sanningsvärde, varför de sägs vara ekvivalenta, likvärdiga, påståenden.

Ekvivalensen ovan kan också utläsas ”p om och endast om q”, vilket förkortas ”p omm q”.

p	q	p ⇔ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Som väntat finner vi att sanningsvärdena för ekvivalensen ovan är samma som för $(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{p})$.

p	q	$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$	$\mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{p}$	$(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{p})$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Vi kan alltså konstatera att $(\mathrm{p} \Leftrightarrow \mathrm{q}) \Leftrightarrow [(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{p})]$.

Exempel 20

Vi använder beteckningarna från exempel 18. Emedan också $x = 2 \Rightarrow \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{J}(x)$ så är de två påståendena ekvivalenta och vi kan skriva att

$\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{J}(x) \Leftrightarrow x = 2$.

Exempel 21

Tidigare har vi konstaterat att påståendena $\mathrm{p} \veebar \mathrm{q}$ och $\mathrm{p} \vee \mathrm{q} \wedge \neg(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q})$ är ekvivalenta. Vi har alltså att $\mathrm{p} \veebar \mathrm{q} \Leftrightarrow \mathrm{p} \vee \mathrm{q} \wedge \neg(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q})$.

Ekvivalenta ekvationer

Om påståendena A och B är ekvationer och ekvivalenta, så har A och B samma lösningar.

Vid ekvationslösning används ofta diverse tekniker för att skriva om en ekvation $f(x) = g(x)$ till formen $x = a$. Det varje omskrivning ska göra gällande är alltså att de två påståendena är ekvivalenta.

Exempel 22

Lös ekvationen $x^2 \sin x = 0$ med avseende på *x*.

Lösning:

Vi har att

$x^2 \sin x = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 0) \vee (\sin x = 0) \Leftrightarrow x = n\pi$ där $n \in Z$.

Räkneregler

Vi kan enkelt resonera oss fram till att följande alltid gäller:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q) \tag{1}$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q) \tag{2}$$

Dessa räknelagar benämns *De Morgans lagar*. Vi kan formulera (1) som ”om inte både p och q är sanna, så måste minst en av dem vara falsk” och (2) som ”om det inte är sant att något av p och q är sant, så måste både p och q vara falska”. Om vi mer stringent vill visa dessa ekvivalenser, behöver vi bara jämföra sanningsvärdena för båda leden i respektive ekvivalens.

Exempel 23

Låt

p: ”Det regnar” och
q: ”Solen skiner”

Då kan vi utläsa påståendet $\neg(p \wedge q)$ som

”Det är inte så att det regnar och solen skiner”.

Enligt De Morgans lag (1) är detta ekvivalent med påståendet $(\neg p) \vee (\neg q)$, vilket vi läser

”Det regnar inte eller så skiner inte solen”.

Entydighet

Märk igen att den matematiska logiken är mer entydig än det mänskliga språket. Meningen

”Det är inte så att det regnar och solen skiner”

kan både tolkas, i detta fall korrekt, som

$\neg(p \wedge q)$ (det är inte så att det regnar samtidigt som solen skiner)

men också, i detta fall inkorrekt, som

$(\neg p) \wedge q$ (det regnar inte och solen skiner).

Det skulle kunna förefalla logiskt tillfredställande att använda prioritetsförtydligande parenteser även i mänskligt språk. I detta fall skulle vi då kunna skriva

”Det är inte så att [det regnar och solen skiner]”, vilket blir entydigt[1].

[1] Den andra tolkningen $(\neg p)\wedge q$ av meningen skulle analogt kunna skrivas

”[Det är inte så att det regnar] och solen skiner”.