Komplexa tal

Människan har alltid använt tal för att beskriva naturen. Ett talsystem är en *mängd* av tal. Det mest primitiva talsystemet är *de naturliga talen*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Med dessa kan många vardagliga problem lösas, såsom ”Kalle har 3 äpplen och Lisa har 4; hur många har de tillsammans?”. Dock kan man inte lösa alla problem med detta system. Till exempel kan man inte svara på frågan ”Anna har 20 kronor och måste ge bort 50; hur många kronor har hon då kvar?” i $\mathbb{N}$. För att lösa dylika problem, inför vi ett nytt, större, talsystem, *de hela talen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

I $\mathbb{Z}$ inser vi att Anna får -30 kronor kvar. Dock är inte ens de hela talen tillräckliga. Om vi har två liter av vatten, och skall dela vattnet lika till tre personer, så kan inte volymen vatten per person uttryckas i $\mathbb{Z}$. Istället nödgas vi införa *de rationella talen*, d.v.s. alla tal som kan skrivas som kvoten mellan två heltal, d.v.s.

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \text{ heltal}\}.$$

I detta talsystem finns svaret på vår vattenfördelningsfråga: $2/3 = 0{,}6666\ldots$. Man skulle kunna tro att det alltid vore tillräckligt med $\mathbb{Q}$, men så är det faktiskt inte. Man kan tämligen enkelt bevisa att diagonalen i en kvadrat med sidan 1 inte exakt kan skrivas som kvoten mellan två heltal. Vi inför därför *de reella talen* $\mathbb{R}$ som mängden av samtliga rationella tal, samt alla andra tal, som alltså inte kan skrivas som kvoten mellan två heltal. Dessa andra tal kallas *irrationella tal*. Exempel på välkända irrationella tal är $\sqrt{2}$, π och e. Faktum är att vi kommer mycket långt i $\mathbb{R}$.

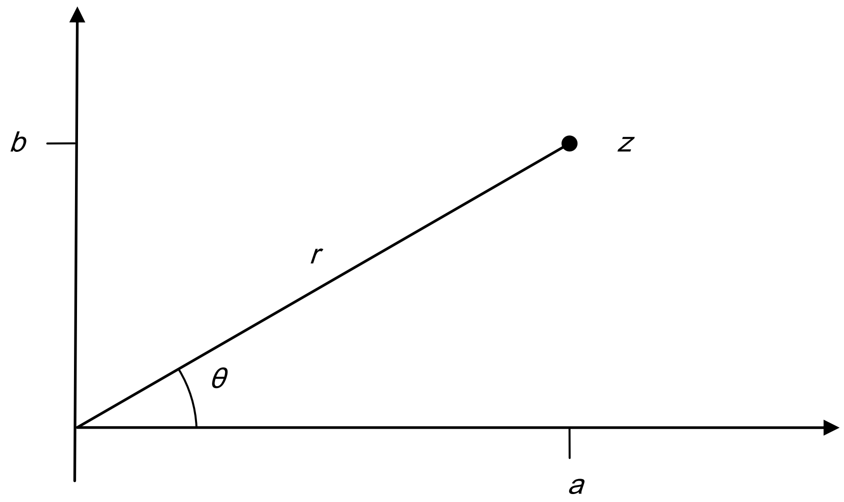
Inom matematiken och dess tillämpningar behöver man dock tillfälligt lösa ekvationer av typen $x^2 = a$ där a är negativt. Som bekant finns det inget tal i $\mathbb{R}$ som satisfierar ekvationen. Därför, för att på ett teoretiskt plan ändå kunna ”lösa” ekvationerna, har man utvecklat ett ännu större talsystem, *de komplexa talen* $\mathbb{C}$. Ett godtyckligt komplext tal består av två reella tal, a och b, och kan skrivas på formen

$$z = a + bi$$

där i är ett tal som *per definition* uppfyller ekvationen $i^2 = -1$.

Vi inser nu att samtliga andragradsekvationer kan lösas i $\mathbb{C}$ (fast inte i $\mathbb{R}$). Som exempel saknar ekvationen $x^2 = -9$ lösningar i $\mathbb{R}$, medan ekvationen i $\mathbb{C}$ satisfieras av såväl $x = 3i$ som $x = -3i$. Man kan visa att en n:te-gradsekvation alltid har precis n stycken rötter (räknat med multiplicitet – t.ex. har ekvationen $(x-2)(x-2) = 0$ de två rötterna $x = 2$).

Medan reella tal kan åskådliggöras på den reella tallinjen, så kan de komplexa talen åskådliggöras på det *komplexa talplanet*. (Man kan säga att $\mathbb{R}$ är *endimensionellt*, medan $\mathbb{C}$ är *tvådimensionellt*.) Förstås kan man även ange ett komplext tal genom att ange riktningen och längden av den räta linje som går mellan origo ($z = 0 + 0i$) och talet i talplanet (med riktningen avses vinkeln räknad moturs mellan den reella axeln och linjen); man talar då om *polär* representation. Se bilden.



$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Märk att exponentialfunktionen i det högra ledet *inte* är den vanliga exponentialfunktionen, utan den *komplexa exponentialfunktionen*, som ***definieras*** som $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Man kan enkelt visa åtskilliga räknelagar för komplexa tal, men jag avstår från det här. Istället hänvisar jag till er kurslitteratur.

Första ordningens differentialekvationer

En differentialekvation på formen

$$y' + f(x)y = g(x)$$

kallas en *linjär differentialekvation av första ordningen*. Dessa löses mycket enkelt genom att man bestämmer en primitiv funktion F till f, och sedan multiplicerar båda leden i ekvationen med den s.k. *integrerande faktorn* $e^{F(x)}$. När detta är gjort inser man att vänsterledet i ekvationen faktiskt är lika med derivatan av produkten $e^{F(x)}y$.

Vi illustrerar förfarandet med ett praktiskt exempel.

$$y' + 2xy = e^{-x^2}$$

En primitiv till $2x$ är x^2, så den integrerande faktorn blir e^{x^2}. Vi erhåller alltså efter multiplikation den ekvivalenta ekvationen

$$e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy = e^{x^2}e^{-x^2} = 1.$$

Vi inser dock att vänsterledet är derivatan av produkten $e^{x^2}y$ (pröva att derivera!), och därför gäller alltså

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} y = 1.$$

Vi har alltså att två derivator är lika, och därför måste de ursprungliga (primitiva) funktionerna vara lika så när som på en konstant.

Alltså måste

$$e^{x^2} y = x + C$$

och

$$y(x) = \frac{x + C}{e^{x^2}}.$$

Problemet är löst.

Separabla differentialekvationer

En annan vanlig typ av differentialekvation är den separabla differentialekvationen, som kan skrivas på formen

$$f(y) y' = g(x).$$

Om man finner en primitiv funktion F till f, så inser vi att vänsterledet är lika med derivatan av den sammansatta funktionen $F(y)$. Sedan fortsätter man som i förra fallet.

Låt oss som exempel lösa

$$y^2 y' = x.$$

En primitiv till y^2 är $\frac{1}{3} y^3$, så

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{3} y^3 = x$$

och

$$\frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Alltså är

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2} x^2 + 3C} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} x^2 + D}$$

och vi är klara.

Andra ordningens differentialekvationer kan också lätt lösas om de är linjära, men detta kräver en längre utläggning än vad jag har plats för här. Jag hänvisar till kurslitteraturen.