Derivator

Innehållsförteckning

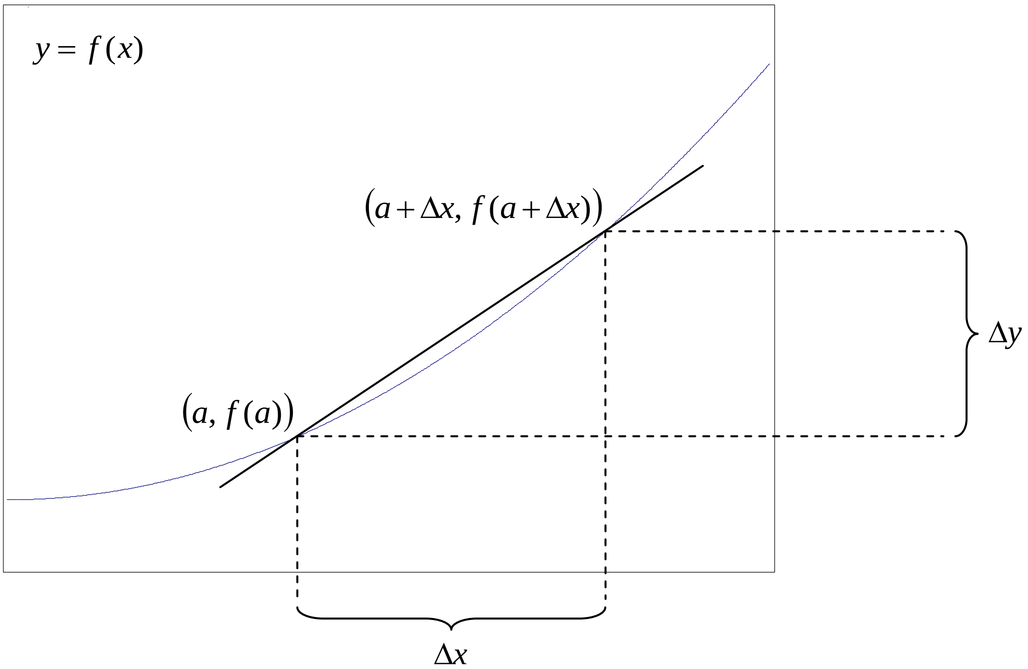
Inledning

De allra flesta fenomen i naturen kan beskrivas med funktioner, d.v.s. samband mellan storheter. Exempelvis är hastigheten hos ett fritt fallande föremål en funktion av falltiden, dygnsmedeltemperaturen beror på dagen på året, tiden för en bilfärd beror på färdens sträcka och bilens medelhastighet och arean av ett område beror på dess sidogränser. En funktions derivata anger med vilken hastighet funktionsvärdet (den beroende variabeln) ändras när den oberoende variabeln ändras, och säger således mycket om hur funktionen uppträder. Denna uppsats definierar derivatan av en funktion, härleder regler för framtagning funktioners derivator (derivering) samt ger praktiska exempel på användningsområden.

Derivatans definition

Derivatan av en funktion $f(x)$ anger funktionens *förändringshastighet*, d.v.s. hur mycket funktionsvärdet ökar när x ökar en enhet. Eftersom förändringshastigheten inte måste vara konstant för alla x i en funktion, är även derivatan en funktion av x. Derivatan av funktionen $f(x)$ betecknas $f'(x)$ (utläses ”f prim (av) x”). En funktions förändringshastighet för $x = a$ är ett följaktligen ett värde och skrivs $f'(a)$.

Om en funktion $y = f(x)$ ritas upp i ett koordinatsystem är funktionens derivata för $x = a$ lika med grafens lutning i punkten $\big(a, f(a)\big)$, eftersom lutningen just anger hur mycket y ökar när x ökar en enhet. Derivatan är således riktningskoefficienten för tangenten i punkten. Vi kan för alla kontinuerliga funktioner bestämma en approximation av derivatan för $x = a$ genom att bestämma riktningskoefficienten k för en sekant till grafen som går genom punkten $\big(a, f(a)\big)$ samt en närbelägen punkt. Vi får således $f'(a) \approx k$. Sekantens riktningskoefficient är enkel att bestämma då vi känner två punkter på sekanten, $\big(a, f(a)\big)$ samt $\big(a+\Delta x, f(a+\Delta x)\big)$.



Riktningskoefficienten blir $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{(a+\Delta x) - a} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Detta tal, *differenskvoten* (*ändringskvoten*) k, är funktionens *medellutning* i intervallet omkring (i detta fall strax efter) $x = a$. Lutningen i just punkten $x = a$ är dock svårare att bestämma, eftersom tangentens riktningskoefficient inte kan beräknas enkelt då endast en koordinat är känd, varvid ingen differenskvot kan ställas upp. Emellertid blir approximationen $f'(a) \approx k$ alltbättre ju mindre Δx blir. Om Δx närmar sig 0 obegränsat (går mot 0), $\Delta x \to 0$, kommer sekanten att övergå till tangenten i punkten $\big(a, f(a)\big)$ och riktningskoefficienten k kommer att gå mot derivatan (lutningen) i punkten $\big(a, f(a)\big)$, $k \to f'(a)$.

Derivatan till funktionen $f(x)$ blir således lika med gränsvärdet av differenskvoten omkring x när $\Delta x \to 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Om vi för enkelhets skull betecknar differensen mellan punkternas x-koordinater h får vi den vanligaste formen av *derivatans definition*:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Det kan vara svårt att direkt avgöra vilket värde derivatan i en viss punkt har genom att använda derivatans definition. Ibland kan differenskvoten förenklas så att det tydligt framgår vilket värde kvoten går mot när $h \to 0$. Oftast är kvoten dock svårförenklad; då kan istället en numerisk kontroll utföras, där differenskvoten beräknas flera gånger för små och minskande värden på h. Om kvoten förefaller stanna på ett visst värde när h blivit tillräckligt litet, kan det anses troligt att derivatan (lutningen, förändringshastigheten) i punkten har det värdet.

EXEMPEL 1:

Funktionen $f(x) = x^2$ är given. Bestäm funktionens förändringshastighet (derivata) för $x = 1{,}5$.

LÖSNING:

Vi använder derivatans definition för att få fram just denna funktions derivata.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} [2x + h]$$

När $h \to 0$ kommer uttrycket $2x + h$ att gå mot $2x$.

Vi ser att funktionen $f(x) = x^2$ har derivatan $f'(x) = 2x$. Derivatan för $x = 1{,}5$ blir då $f'(1{,}5) = 2 \times 1{,}5 = 3$.

Svar: $f'(1{,}5) = 3$

EXEMPEL 2:

Funktionen $f(x) = 2\sqrt{x}$ är given. Bestäm funktionens förändringshastighet (derivata) för $x = 3$ med fyra decimaler.

LÖSNING:

Här ger derivatans definition $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sqrt{x+h} - 2\sqrt{x}}{h}$, vilket är svårt att förenkla direkt. Istället kan vi lösa uppgiften numeriskt (approximativt).

Vi beräknar differenskvoten för $x = 3$ och några små, minskande, tal *h*:

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001
differenskvot	0,572618	0,576870	0,577302	0,577345	0,577350	0,577350	0,577350

Det är rimligt att anta att $f'(3) \approx 0{,}577350$.

Svar: $f'(3) \approx 0{,}5774$

Om $y = f(x)$ kan derivatan $f'(x)$ också betecknas y' eller $\frac{dy}{dx}$. Om den oberoende variabeln *x* och den beroende variabeln *y* har enheter, kommer derivatan också att få en enhet. Eftersom derivatan anger hur mycket *y* ändras per enhet *x*, kommer derivatans enhet att bli kvoten av *y*:s och *x*:s enheter.

EXEMPEL 3:

En sten släpps från en höjd och får falla fritt. Fallsträckan *s* meter beror på tiden *t* sekunder som stenen fallit. Man finner följande samband mellan *s* och *t*:

$$s(t) = 4{,}91t^2$$

Beräkna och tolka $s'(2)$.

LÖSNING:

Derivatans definition ger

$$s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}91(t+h)^2 - 4{,}91t^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}91(t^2 + 2th + h^2) - 4{,}91t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}91t^2 + 9{,}82th + 4{,}91h^2 - 4{,}91t^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9{,}82th + 4{,}91h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left[9{,}82t + 4{,}91h\right] = 9{,}82t$$

Derivatan $s'(t)$ anger hur många meter sträckan ökar när tiden ökar en sekund vid tiden *t*, d.v.s. rörelsens (momentan-) hastighet vid tiden *t*. Eftersom sträckfunktionens derivata är lika med hastighetsfunktionen för samma rörelse kan vi således skriva $v(t) = 9{,}82t$. Vi ser att detta är fysikens formel för hastigheten vid konstant acceleration (utan ursprungshastighet), $v(t) = at$, vilket stämmer väl. (Notera att $a = 9{,}82\ \mathrm{m/s}^2$ är jordens tyngdacceleration.)

Svar: Stenens fallhastighet efter tiden $t = 2\ \mathrm{s}$ är $s'(2) \approx 19{,}6\ \mathrm{m/s}$.

Grundläggande derivator

Vid derivering av funktioner är det oftast både inexakt och onödvändigt att utgå från derivatans definition. Istället kan man algebraiskt härleda derivator till vanliga grundfunktioner.

Konstanta och linjära funktioner

Alla konstanta funktioner $f(x) = C$ har samma funktionsvärde, *C*, för alla *x*, vilket innebär att grafen blir en rät, horisontell linje utan lutning och derivatan blir 0 för alla *x*. Matematiskt kan detta visas utifrån derivatans definition.

$$f(x) = C$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Alla linjära funktioner $f(x) = kx + m$ har en konstant lutning *k*, vilket innebär att derivatan är *k* för alla *x*.

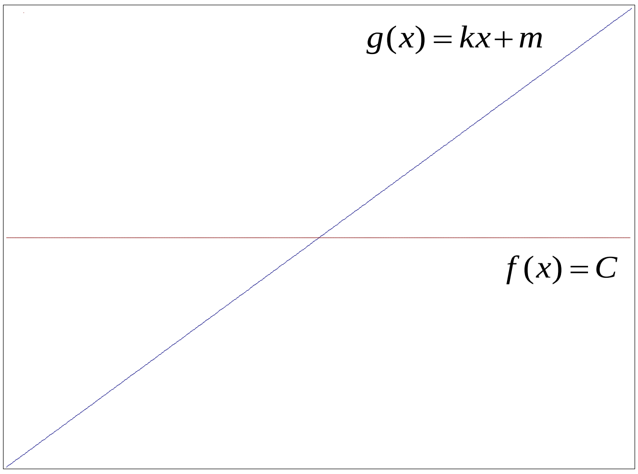
$$f(x) = kx + m$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) + m - (kx+m)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{kx + kh + m - kx - m}{h} =$$

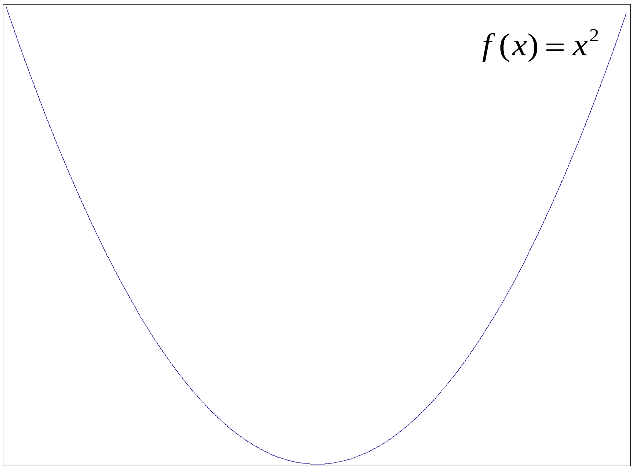
$$= \lim_{h \to 0} \frac{kh}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{h}{h} \times k \right] = 1 \times k = k$$



Figur 1 Exempel på en konstant funktion $f(x)$ och en linjär funktion $g(x)$.

Potensfunktioner

Lutningen hos potensfunktioner varierar dock beroende på *x*. Eftersom en grundläggande potensfunktion kan skrivas $f(x) = x^a$ ser vi att differensen mellan funktionsvärdena av två på varandra följande naturliga *x*-värden inte är samma för alla *x*-par. Om $a > 1$ ökar differensen när *x*-värdena ökar. Grafen till en potensfunktion visar också att lutningen är variabel:



Figur 2 Exempel på en potensfunktion $f(x)$.

Vi kommer senare att algebraiskt härleda derivatan till en allmän potensfunktion. Nu ska vi endast studera specialfall för att se om de antyder någon allmän regel. Vi använder derivatans definition för att härleda derivatorna av x^2, x^3 samt x^4.

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} [2x + h] = 2x$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 2x^2h + xh^2 + hx^2 + 2xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2h + xh^2 + hx^2 + 2xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} [2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2] = 2x^2 + x^2 = 3x^2$$

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 2x^3h + x^2h^2 + hx^3 + 2x^2h^2 + xh^3 + x^3h + 2x^2h^2 + xh^3 + h^2x^2 + 2xh^3 + h^4 - x^4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^3h + x^2h^2 + hx^3 + 2x^2h^2 + xh^3 + x^3h + 2x^2h^2 + xh^3 + h^2x^2 + 2xh^3 + h^4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[2x^3 + x^2h + x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^3 + 2x^2h + xh^2 + hx^2 + 2xh^2 + h^3\right] = 2x^3 + x^3 + x^3 = 4x^3$$

Vi får följande resultat:

$f(x)$	x^2	x^3	x^4
$f'(x)$	$2x$	$3x^2$	$4x^3$

Det förefaller som om funktionen $f(x) = x^a$ har derivatan $f'(x) = ax^{a-1}$. Försök med större exponenter bekräftar hypotesen. Vi kommer emellertid senare att presentera ett allmängiltigt bevis i form av en härledning av den allmänna potensfunktionens derivata (och inte endast specialfallen med exponenterna 2, 3 och 4).

Exponentialfunktioner

En grundläggande exponentialfunktion kan skrivas $f(x) = a^x$. Vi vill nu allmänt härleda funktionens derivata utifrån derivatans definition.

$$f(x) = a^x$$

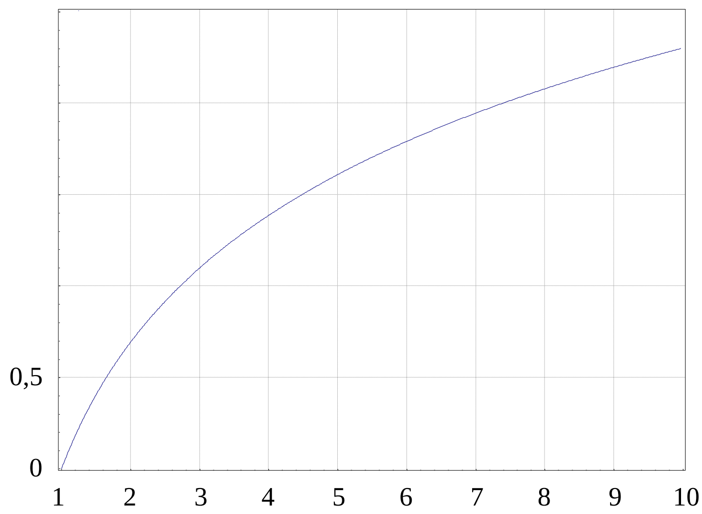
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \left[a^x \frac{a^h - 1}{h}\right] = a^x \times \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Vi ser att derivatan till funktionen $f(x) = a^x$ är lika med produkten av funktionen och ett gränsvärde som beror på basen *a*. Vi kan numeriskt (med $h = 0{,}0000001$) beräkna detta gränsvärde för några olika baser *a*.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gränsvärde	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972	2,3026

Vi kan också rita upp en graf med gränsvärdet som en funktion av *a*.



Vi ser att det borde finnas en bas *a* för vilken gränsvärdet blir 1 (tydligt syns att $2 < a < 3$). Derivatan av en exponentialfunktion med denna bas blir följaktligen lika med själva funktionen (gånger 1). Vi söker nu denna bas, som vi benämner *e*.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\frac{\lim_{h \to 0}\left[e^h - 1\right]}{\lim_{h \to 0} h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0}\left[e^h - 1\right] = \lim_{h \to 0} h$$

$$\lim_{h \to 0} e^h = \lim_{h \to 0}\left[h + 1\right]$$

vilket innebär att $e = \lim_{h \to 0} \sqrt[h]{h+1}$.

En numerisk analys ger ett närmevärde till *e*.

h	1,E-02	1,E-03	1,E-04	1,E-05	1,E-06	1,E-07	1,E-09	1,E-10
e	2,704814	2,716924	2,718146	2,718268	2,718280	2,718282	2,718282	2,718282

Vi finner att $e \approx 2{,}718282$.

Exponentialfunktionen $f(x) = e^x$ har således derivatan $f'(x) = e^x$. Detta betyder att lutningen på grafen till $f(x) = e^x$ vid *x* är lika med funktionsvärdet för samma *x*.

Nu vill vi härleda derivatan till den allmänna exponentialfunktionen $f(x) = a^x$, genom att skriva om den med basen *e*. Den inversa funktionen till $y = e^x$ är givetvis $x = \log_e y$, vilket dock oftast skrivs endast $x = \ln y$. Vi får $f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$. För att derivera detta måste vi dock kunna derivera en funktion av en funktion, vilket vi återkommer till.

Sammansatta derivator

De flesta funktioner är inte enkla grundfunktioner, utan mer sammansatta funktioner. Betrakta som exempel följande funktioner:

Summor och differenser	
$f(x) = x^2 + 3x$	(summan av en potensfunktion och en linjär funktion)
$g(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$	(differensen mellan en potensfunktion och en linjär funktion)

Produkter och kvoter	
$f(x) = 5x^2$	(produkten av en konstant funktion och en potensfunktion)
$g(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{a^x}$	(kvoten av en summa och en exponentialfunktion)

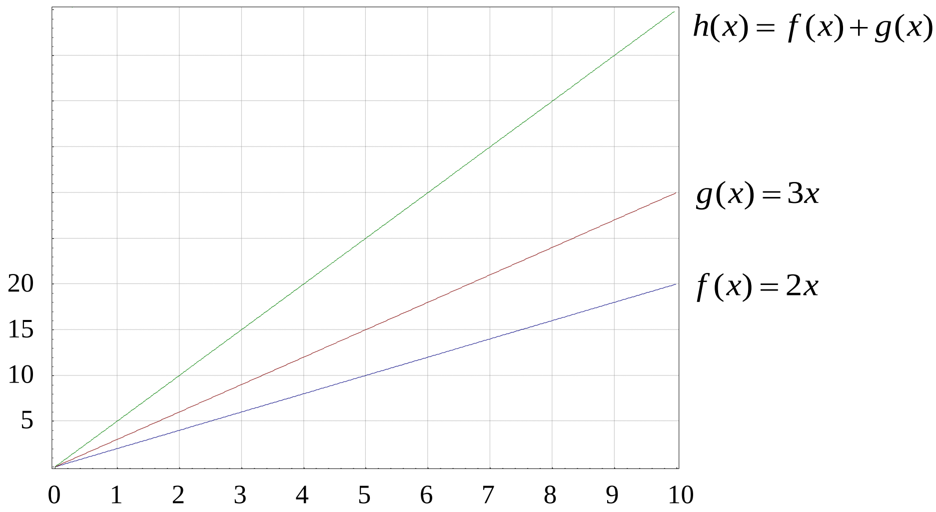
Sammansatta funktioner	
$f(x) = e^{2x}$	(en exponentialfunktion ($f(x) = e^u$) innehållande en annan linjär funktion ($u = 2x$))

Vi ska nu härleda allmänna derivator till summor (och differenser), produkter (och kvoter) samt sammansatta funktioner.

Derivatan av en summa

Låt $f(x) = g(x) + h(x)$. Vid punkten *x* ökar funktionsvärdet hos termen $g(x)$ med $g'(x)$ per enhet *x*, medan funktionsvärdet hos termen $h(x)$ ökar med $h'(x)$ per enhet *x*. Detta innebär att funktionen $f(x)$ totalt kommer att öka med $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ per enhet *x*. Låt $f(x) = g(x) - h(x)$. Samma resonemang ger då att $f'(x) = g'(x) - h'(x)$.

Summaregeln (och differensregeln): Om $f(x) = g(x) + h(x)$ så gäller $f'(x) = g'(x) + h'(x)$. Om $f(x) = g(x) - h(x)$ så gäller $f'(x) = g'(x) - h'(x)$.



Grafen ovan visar ett exempel med två linjära funktioner, med lutningarna 2 respektive 3, samt summan av funktionerna. Summafunktionen får då lutningen $2+3=5$.

EXEMPEL 4:

Låt $f(x)=x^2+5x$. Med vilken hastighet ökar funktionsvärdet när $x=5$?

LÖSNING:

Funktionen är summan av en potensfunktion och en linjär funktion. Derivatan blir $f'(x)=2x+5$, vilket ger $f'(5)=15$.

Svar: När $x=5$ ökar funktionsvärdet med 15 *y*-enheter per enhet *x*.

Derivatan av en produkt

Vi ska nu se att även produkter kan deriveras med en allmän formel. En allmän funktion med en produkt kan skrivas $f(x)=g(x)\times h(x)$. Vi vill nu finna ett enkelt uttryck för $f'(x)$.

Derivatans definition ger (blanda inte ihop funktionen $h(x)$ med variabeln *h*):

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)h(x+h)-g(x)h(x)}{h}$$

För en allmän funktion $a(x)$ gäller att funktionsvärdet för $x+h$ (där *h* är litet) är (ungefär) lika med funktionsvärdet för *x* plus ökningen per enhet *x*, d.v.s. $a'(x)$, gånger så ”många” enheter *x* funktionen ska öka, d.v.s. *h*. [1]

Detta ger att $a(x+h)\approx a(x)+h\times a'(x)$. Om $g(x+h)$ samt $h(x+h)$ i formeln ovan skrivs om på detta sätt fås följande uttryck:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{[g(x)+h\times g'(x)][h(x)+h\times h'(x)]-g(x)h(x)}{h}=\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)h(x)+g(x)h'(x)h+h(x)g'(x)h+g'(x)h'(x)h^2-g(x)h(x)}{h}=\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)h'(x)h+h(x)g'(x)h+g'(x)h'(x)h^2}{h}=\\
&=\lim_{h\to 0}\left[g(x)h'(x)+h(x)g'(x)+g'(x)h'(x)h\right]=\\
&=g(x)h'(x)+h(x)g'(x)
\end{aligned}$$

Funktionen $f(x)=g(x)\times h(x)$ har således derivatan $f'(x)=g(x)h'(x)+h(x)g'(x)$, d.v.s. att derivatan av en produkt av två funktioner är lika med den ena funktionen gånger den andras derivata, plus den andra funktionen gånger den förstas derivata.

[1] Om funktionen är linjär, d.v.s. har en konstant derivata, gäller sambandet exakt även för större *h*.

Om en av faktorerna är en konstant får vi en ännu enklare derivata. Låt $f(x) = g(x) \times h(x)$ och sätt $g(x) = C$. Detta ger derivatan
$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x) = C \times h'(x) + h(x) \times 0 = C \times h'(x)$.

Derivatan av en konstant gånger en funktion, är således lika med konstanten gånger funktionens derivata, $f(x) = C \times g(x) \Rightarrow f'(x) = C \times g'(x)$.

Tidigare konstaterade vi att potensfunktionen $f(x) = x^a$ har derivatan $f'(x) = ax^{a-1}$. Detta kan vi nu utvidga till att allmänna potensfunktionen $f(x) = Cx^a$ har derivatan
$f'(x) = Cax^{a-1}$.

EXEMPEL 5:

Lös Exempel 2 med deriveringsreglerna.

LÖSNING:

Funktionen $s(t) = 4{,}91t^2$ har derivatan $s'(t) = 4{,}91 \times 2t = 9{,}82t$. Vi märker att deriveringen blir mycket enklare om deriveringsreglerna används istället för derivatans definition.

Svar: Fallhastigheten efter två sekunder är $v(2) \approx 19{,}6\ \text{m/s}$.

Derivatan av en sammansatt funktion

När vi studerade exponentialfunktioner behövde vi derivera funktionen $f(x) = e^{x \ln a}$, vilket vi inte kunde. Vi kunde endast derivera *e* upphöjt till *x*, inte *e* upphöjt till en funktion av *x*. Vi ska nu härleda en allmän derivata till en sammansatt funktion.

Låt $f(x) = g(h(x))$ och finn ett uttryck för $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h(x+h)) - g(h(x))}{h}$$

Vi utnyttjar även här att $a(x+h) \approx a(x) + h \times a'(x)$ för små *h*. Vi utvecklar $h(x+h)$ därmed.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h(x) + h \times h'(x)) - g(h(x))}{h}$$

Nu har vi fått funktionen *g*() av en summa där den andra termen är liten (ty den innehåller faktorn *h* som går mot noll), varför även den kan utvecklas med samma samband.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h(x)) + h \times h'(x) \times g'(h(x)) - g(h(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \times h'(x) \times g'(h(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \left[h'(x) \times g'(h(x)) \right] = g'(h(x)) \times h'(x)$$

I den sammansatta funktionen $f(x)=g(h(x))$ kallas $g(u)$ den *yttre* funktionen och $u=h(x)$ den *inre* funktionen. Vi ser att derivatan av en sammansatt funktion är lika med produkten av den yttre funktionens derivata (av den inre funktionen) och den inre funktionens derivata.

$$f(x)=g(h(x)) \Rightarrow f'(x)=g'(h(x))\times h'(x)$$

Om vi sätter $y=f(u)$ samt $u=g(x)$ får vi med alternativ notation att $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$.

Denna regel benämns *kedjeregeln*.

Derivatan av en kvot

Eftersom en kvot kan skrivas som produkten av täljaren och det inverterade värdet av nämnaren, kan produktregeln användas för att härleda en allmän derivata till en kvot av två funktioner.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=g(x)\times[h(x)]^{-1}$$

Produktregeln ger:

$$f'(x)=g(x)\times\left(-[h(x)]^{-2}\right)\times h'(x)+[h(x)]^{-1}\times g'(x)=$$
$$=\frac{-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}+\frac{g'(x)}{h(x)}$$

Om högra termen förlängs med $h(x)$ kan summan skrivas om som ett enda bråk:

$$f'(x)=\frac{-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}+\frac{g'(x)h(x)}{[h(x)]^2}=\frac{h(x)g'(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Vi ser att derivatan av en kvot av två funktioner, är lika med nämnaren gånger täljarens derivata minus täljaren gånger nämnarens derivata, dividerat med kvadraten på nämnaren.

Fler grundläggande derivator

Derivatan av en allmän exponentialfunktion

Nu kan vi härleda den allmänna derivatan till exponentialfunktionen $f(x)=a^x$. Vi konstaterade att $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$ och vet att $y=e^x$ har derivatan $y'=e^x$. Funktionen $f(x)=e^{x\ln a}$ är en sammansatt funktion bestående av den yttre exponentialfunktionen $f(x)=e^u$ och den inre linjära funktionen $u=x\ln a$ ($\ln a$ är konstant). Vi kan här använda kedjeregeln:

$$f(x)=a^x=e^{x\ln a}$$
$$f'(x)=e^{x\ln a}\times\ln a=e^{\ln a^x}\times\ln a=a^x\times\ln a$$

Vi ser att derivatan till exponentialfunktionen a^x är lika med produkten av funktionen och den naturliga logaritmen (ln) av basen *a*.

Logaritmiska funktioner

Vi ska nu härleda derivatan till den allmänna logaritmiska grundfunktionen $f(x) = \log_a x$.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Vi deriverar nu båda leden i den högra ekvationen.

$$a^y \times \ln a \times y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{a^y \times \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Vi ser att den logaritmiska funktionen $f(x) = \log_a x$ har derivatan $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

Specialfallet $f(x) = \ln x = \log_e x$ får således derivatan $f'(x) = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$.

Derivatan av en allmän potensfunktion

Tidigare, när vi studerade potensfunktioner på sidan 7, härledde vi derivatorna för specialfall av potensfunktioner, och antog utifrån resultatet derivatan av en allmän potensfunktion. Det är emellertid både matematiskt säkrare och snyggare att direkt härleda derivatan för den allmänna potensfunktionen, vilket vi nu ska göra.

Låt $y = x^a$. Vi logaritmerar båda leden och förenklar sedan det högra ledet.

$$\ln y = \ln x^a$$

$$\ln y = a \ln x$$

Vi deriverar nu båda leden var för sig.

$$\frac{1}{y} \times y' = a \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{ay}{x}$$

$$y' = \frac{ax^a}{x} = a \times \frac{x^a}{x} = a \times x^{a-1}$$

Vi får samma resultat som vi tidigare antagit, men vi har nu presenterat ett allmängiltigt bevis (som dessutom är betydligt enklare än de operationer vi utförde på sidan 7).

Trigonometriska funktioners derivator

Många geometriska uträkningar innehåller trigonometriska funktioner, liksom funktioner som beskriver periodiska fenomen. Vi ska nu härleda de trigonometriska funktionernas derivator.

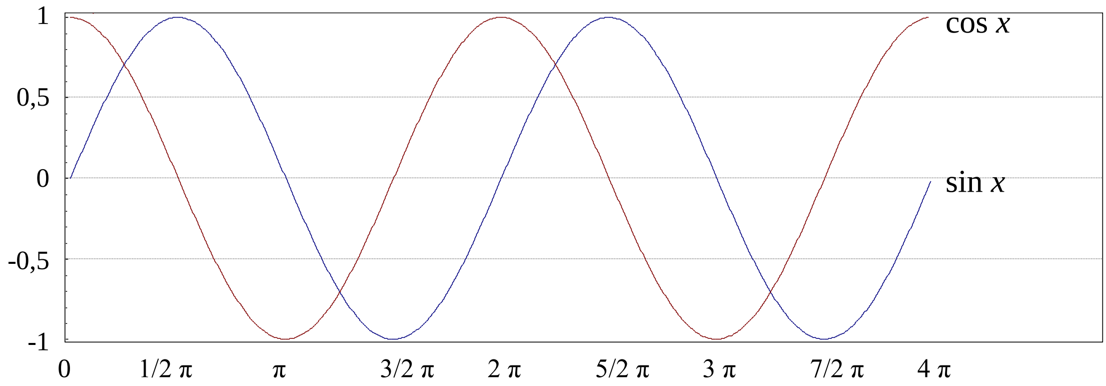
Sinus

Om $f(x) = \sin x$ så ger derivatans definition följande:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right] =$$
$$= \sin(x)\times\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos(h)-1}{h}\right]+\cos(x)\times\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(h)}{h}\right]$$

En numerisk analys (för $h = 0{,}0000001$) visar att $\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos(h)-1}{h}\right] = 0$ och att $\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(h)}{h}\right] = 1$.

Detta ger derivatan $f'(x) = \sin(x)\times 0+\cos(x)\times 1 = \cos(x)$. Sinusfunktionens derivata är således lika med cosinusfunktionen. Om sinusfunktionen och cosinusfunktionen ritas upp i samma koordinatsystem ser man tydligt att detta är rimligt; lutningen på sinuskurvan vid en viss punkt *x* är lika med cosinuskurvans *y*-värde för samma *x*. Till exempel ser vi att där sinuskurvan vänder (vid maximum och minimum, där den är horisontell) är cosinuskurvan vid 0. När sinuskurvan är vid 0 och sjunker som mest, är cosinuskurvan vid -1. När sinuskurvan är vid 0 och stiger som mest, är cosinuskurvan vid 1.



Cosinus

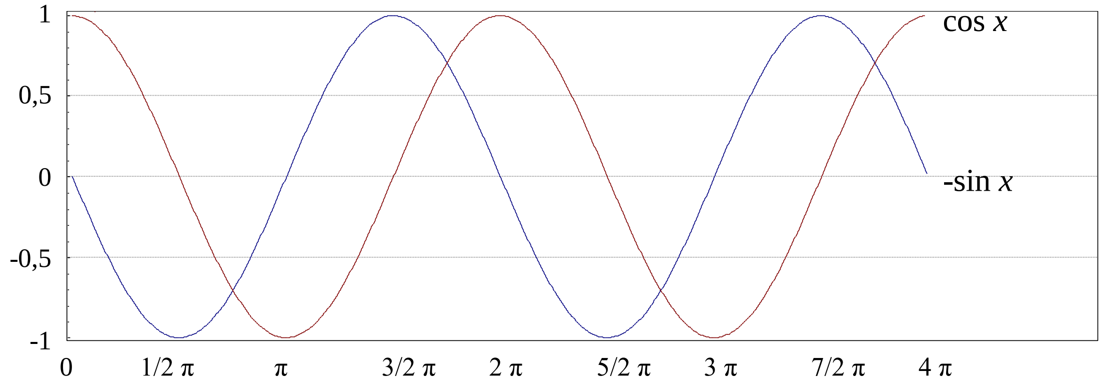
Låt oss nu finna derivatan av cosinusfunktionen.

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right] =$$
$$= \cos(x)\times\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos(h)-1}{h}\right]-\sin(x)\times\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(h)}{h}\right]$$

Enligt tidigare vet vi att $\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos(h)-1}{h}\right] = 0$ och $\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(h)}{h}\right] = 1$.

Därför blir derivatan $f'(x)=\cos(x)\times 0-\sin(x)\times 1=-\sin(x)$.

Vi ser att cosinusfunktionens derivata är lika med den negativa sinusfunktionen. Även detta ser rimligt ut i ett koordinatsystem. Vi ser att cosinusgrafens lutning vid *x* är lika med funktionsvärdet av den negativa sinusfunktionen vid *x*.



Tangens

Lås oss nu studera tangensfunktionens derivata. Eftersom tangens för *x* är kvoten av sinus och cosinus för samma värde, kan vi utgå från dessa funktioners derivator.

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Detta kan också uttryckas med tangens:

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

Arcusfunktioner

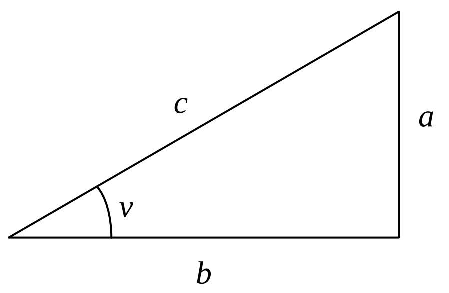
Arcusfunktionerna arcsinus, arccosinus samt arctangens är de inversa funktionerna till sinus, cosinus samt tangens. Vi ska nu härleda deras derivator.

Arcsinus

$$y=\arcsin x \Leftrightarrow \sin y=x$$

$$\sin y=x$$
$$\cos y\times y'=1$$
$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\cos\arcsin x}$$

Derivatans nämnare, $\cos\arcsin x$, kan förenklas med hjälp av en rätvinklig triangel.



Vi vill uttrycka $\cos \arcsin x$ utan trigonometriska funktioner (vilket blir både enklare och exaktare).

$$v = \arcsin x = \arcsin \frac{a}{c}$$

$$x = \frac{a}{c}$$

$$\cos v = \frac{b}{c} \quad \text{där}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad \text{ger}$$

$$\cos v = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos v = \cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$$

Byter vi ut nämnaren i derivatan får vi $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Arccosinus

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$$

$$-\sin y \times y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sin \arccos x}$$

Även här kan vi förenkla nämnaren. (Se triangeln vid förenklingen av arcsinus derivata.)

$$v = \arccos x = \arccos \frac{b}{c}$$

$$x = \frac{b}{c}$$

$$\sin v = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin v = \sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$$

$$-\sin v = -\sin \arccos x = -\sqrt{1 - x^2}$$

Byter vi ut nämnaren i derivatan får vi $y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$.

Arctangens

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} \times y' = 1$$

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1$$

$$y' = \cos^2 y = \cos^2 \arctan x$$

Vi vill nu förenkla derivatan och få bort de trigonometriska funktionerna.

$$v = \arctan x = \arctan \frac{a}{b}$$

$$x = \frac{a}{b}$$

$$\cos v = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos^2 v = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 v} = \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = x^2 + 1$$

$$\cos^2 v = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\cos^2 v = \cos^2 \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Byter vi ut uttrycket för derivatan får vi $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$

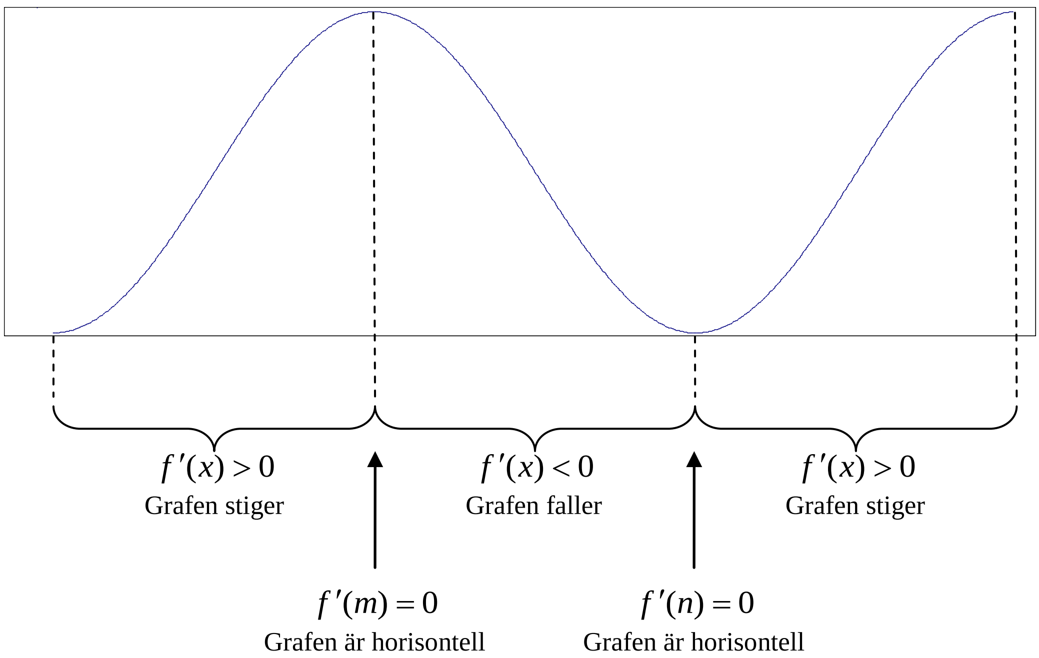
Funktionsanalys

En funktions derivata, som anger funktionens förändringshastighet, kallas också funktionens förstaderivata. Derivatan av förstaderivatan, som anger förändringshastigheten hos funktionens förstaderivata, kallas funktionens andraderivata. Andraderivatans derivata kallas funktionens tredjederivata, o.s.v. Följande beteckningar används för olika derivator:

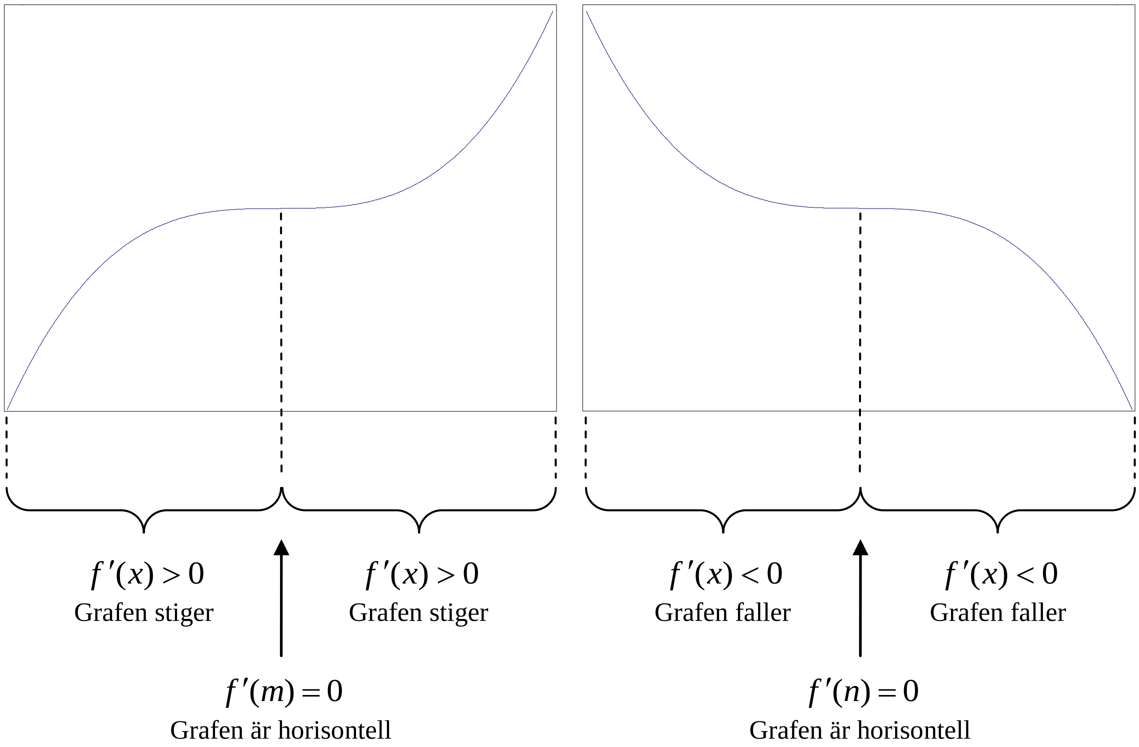
Ordning	**Beteckningar**	
1	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$
2	$f''(x)$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
n	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

$f''(x)$ utläses ”*f* bis (av) *x*”. Funktionen sträckan av tiden $s(t)$ har exempelvis förstaderivatan hastigheten av tiden $s'(t) = v(t)$ och andraderivatan accelerationen av tiden $s''(t) = v'(t) = a(t)$.

Förstaderivatan $f'(x)$ anger som bekant lutningen till funktionen $f(x)$. Detta innebär att om $f'(x) > 0$ i ett intervall $a < x < b$ så växer funktionsvärdet hos $f(x)$ i intervallet och grafen stiger. Om $f'(x) < 0$ i ett intervall $a < x < b$ så avtar funktionsvärdet hos $f(x)$ i intervallet och grafen faller. Om $f'(x) = 0$ vid en viss punkt är funktionsvärdet konstant och grafen (åtminstone dess tangent) horisontell där. Om funktionen $f(x)$ och dess derivata är kontinuerliga kan derivatan endast byta tecken vid dess nollställen, varför den säger mycket om hur grafen till $f(x)$ ser ut. Studera grafen nedan.



Före punkten $x = m$ stiger grafen och efter punkten faller grafen. Detta ger grafen ett (lokalt) *maximum* för $x = m$. Före punkten $x = n$ faller grafen och efter punkten stiger grafen. Detta ger grafen ett (lokalt) *minimum* för $x = n$. Dessa punkter kallas för (lokal) *maximipunkt* respektive (lokal) *minimipunkt*. Här är förstaderivatan lika med noll. Funktionens värden vid punkterna kallas (lokalt) *maximivärde* samt (lokalt) *minimivärde*. Studera nu graferna nedan.



Grafen stiger både före och efter $x = m$, men är horisontell vid $x = m$. Detta gör punkten $x = m$ till en *terrasspunkt*. Grafen faller både före och efter $x = n$, men är horisontell vid $x = n$. Detta gör punkten $x = n$ till en terrasspunkt. Funktionsvärdet vid en terrasspunkt kallas *terrassvärde*.

Där förstaderivatan till en funktion är noll, $f'(x) = 0$, kan derivatan således byta tecken. Vid sådana punkter (och ”nästan” enbart vid sådana punkter) har funktionen således ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en terrasspunkt.

Funktionen har ett lokalt maximum i punkten om förstaderivatan är positiv (grafen stiger) före punkten och är negativ (grafen faller) efter punkten. *Teckenväxlingen* hos förstaderivatan är då + 0 –. Funktionen har ett lokalt minimum i punkten om förstaderivatan är negativ (grafen faller) före punkten och är positiv (grafen stiger) efter punkten. Teckenväxlingen för förstaderivatan är då – 0 +. Funktionen har ett terrassvärde i punkten om teckenväxlingen är + 0 + (grafen stiger före och efter punkten) eller – 0 – (grafen faller före och efter punkten).

Man kan få en enkel uppfattning om en graf (och givetvis också den genererande funktionen) genom att studera teckenväxlingen hos förstaderivatan (utföra ett s.k. *teckenstudium*). Genom att solvera ekvationen $f'(x) = 0$ med avseende på *x* (finna förstaderivatans nollställen) samt ta reda på förstaderivatans tecken mellan nollställena, ser vi när grafen till funktionen $f(x)$ stiger och faller samt när den har maximi-, minimi- och terrassvärden.

EXEMPEL 6:

Finn alla lokala maximi- och minipunkter på grafen till funktionen $y = 12x^3 + 24x^2 - 60x - 72$. Svara med tre gällande siffror.

LÖSNING:

Funktionen kan endast ha maximum och minimum där förstaderivatan byter tecken, d.v.s. där $y' = 0$.

$$y' = 36x^2 + 48x - 60$$

$$36x^2 + 48x - 60 = 0$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{(4/3)^2}{4} + \frac{5}{3}}$$

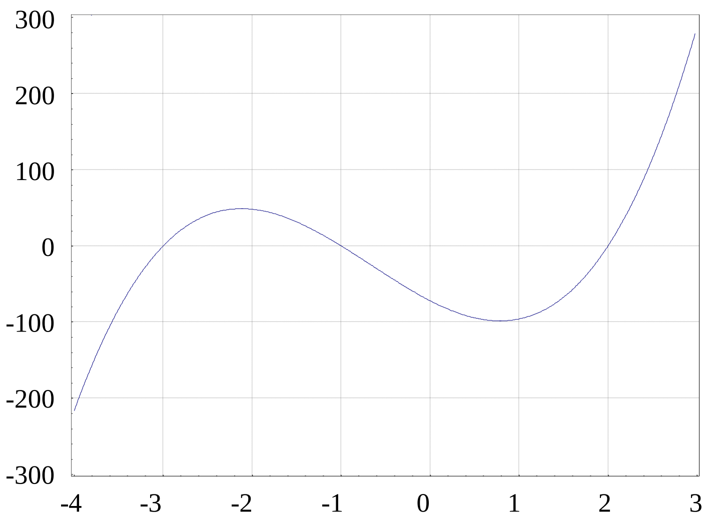
$$x_1 = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3} \approx -2{,}12 \quad \text{samt} \quad x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3} \approx 0{,}786$$

Vi vill nu veta om grafen har maximipunkter-, minimipunkter eller terrasspunkter för dessa *x*-värden.

Vi vet att det endast är vid dessa *x*-värden (förstaderivatans nollställen) som förstaderivatan kan byta tecken. Därför har derivatan samma tecken för alla $x < x_1$, för alla $x_1 < x < x_2$ samt för alla $x > x_2$. Vi beräknar nu derivatan för ett *x*-värde inom respektive intervall för att bestämma förstaderivatans tecken i intervallet, d.v.s. om funktionen växer eller avtar.

y	↗	MAX	↘	MIN	↗
y'	+	0	–	0	+
x	(-3)	x_1	(0)	x_2	(1)

Vi ser att x_1 ger ett lokalt maximum och x_2 ett lokalt minimum. Funktionsvärdena blir $y_{max} = y(x_1) \approx 48{,}7$ och $y_{min} = y(x_2) \approx -98{,}5$, vilket ger koordinaterna $(-2{,}12; 48{,}7)$ för maximum och $(0{,}786; -98{,}5)$ för minimum. Vi kontrollerar vår lösning med grafen:

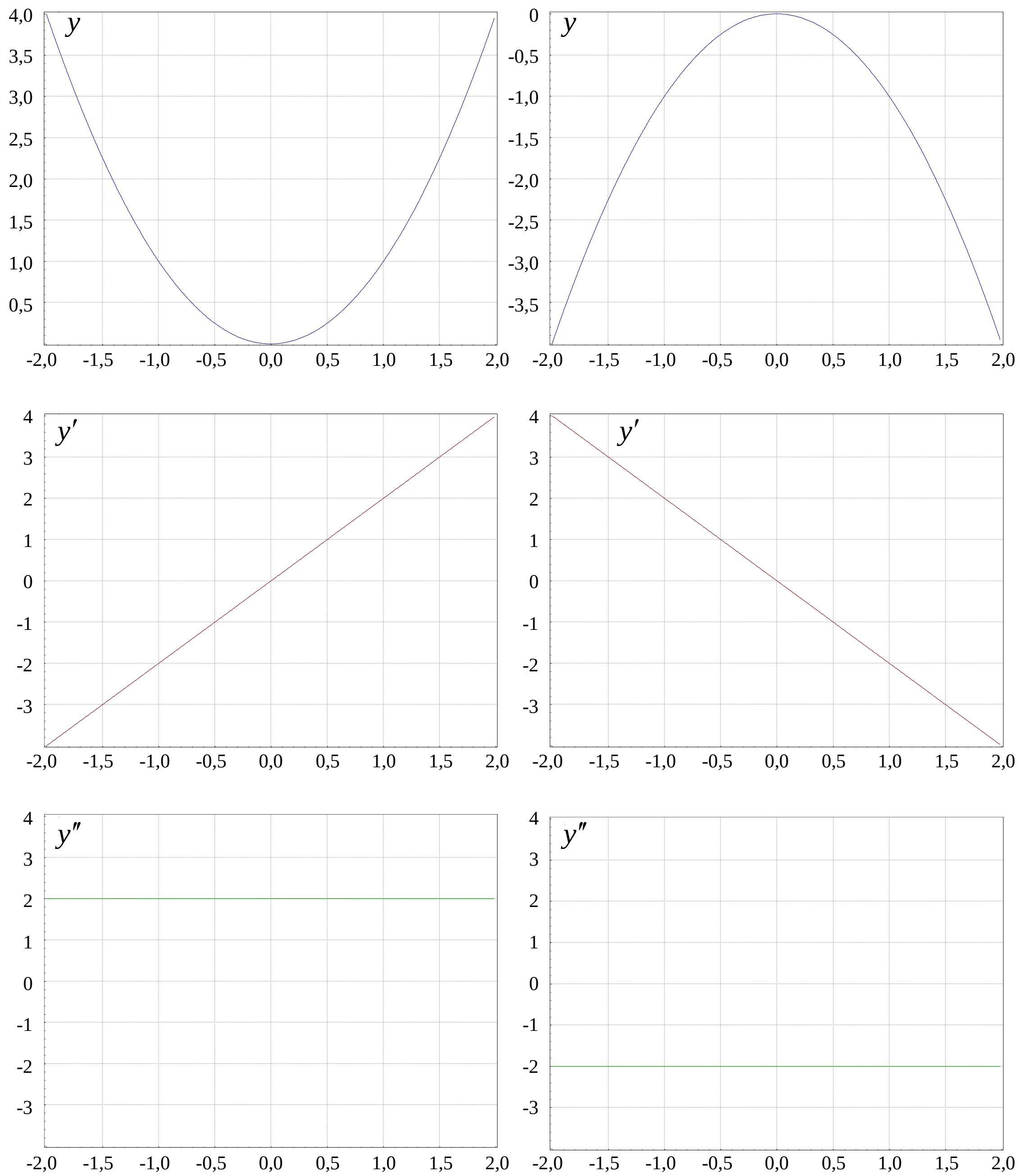


Svar: Funktionen har maximum vid $(-2{,}12; 48{,}7)$ samt minimum vid $(0{,}786; -98{,}5)$.

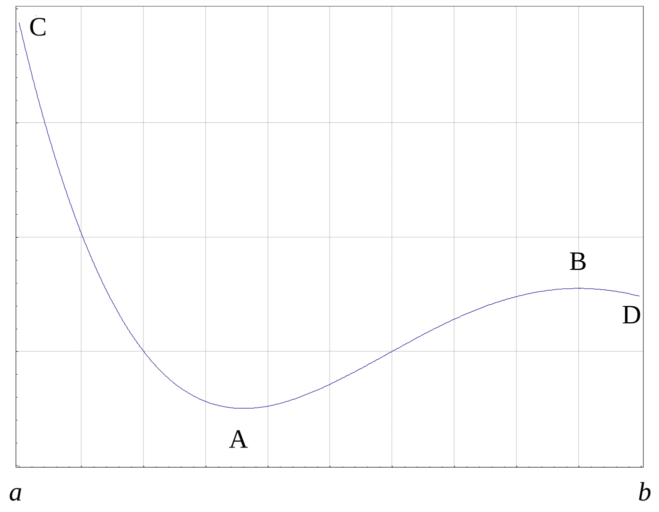
Istället för att direkt studera förstaderivatans teckenväxling, kan man ofta använda andraderivatan för att avgöra huruvida en extrempunkt är en maximi- eller minimipunkt.

Om en punkt är en maximipunkt måste förstaderivatan vid punkten utföra teckenväxlingen + 0 –. Förstaderivatan måste alltså avtaga. Detta innebär att andraderivatan bör (men måste inte alltid) vara negativ i punkten, $f''(x) < 0$. Om en punkt istället är en minimipunkt måste förstaderivatan vid punkten utföra teckenväxlingen – 0 +. Förstaderivatan måste alltså växa. Detta innebär att andraderivatan bör vara positiv, $f''(x) > 0$ i punkten. Om andraderivatan däremot är noll, $f''(x) = 0$, är punkten sannolikt ett terrassvärde. Det kan dock även då röra sig om ett extremvärde i det fallet förstaderivatan har ett terrassvärde i punkten. Om $f''(x) = 0$ fungerar således inte testet med andraderivatan, utan man måste ”manuellt” kontrollera förstaderivatans teckenväxling.

De två första fallen exemplifieras av de två följande funktionerna samt deras första- och andraderivator på nästa sida.


y
y
y′
y′
y″
y″
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
-2,5
-3,0
-3,5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2,0 -1,5 -1,0 -0,5 0,0 0,5 1,0 1,5 2,0

Det värde som verkligen är *högst* eller *lägst* inom ett intervall kan vara det högsta/lägsta lokala extremvärdet eller något värde vid intervallets gränser. Följande graf visar en funktion i intervallet $a \le x \le b$.



Grafen har en lokal minimipunkt A samt en lokal maximipunkt B. Det lägsta värdet i intervallet är förvisso det för minimipunkten A. Det högsta värdet i intervallet är dock det för ändpunkten C.

Exempel på praktiska applikationer

Nedan följer några exempel på praktiska tillämpningar av derivator.

EXEMPEL 7:

För ett föremål som släpps från en höjd *h* meter över marken och tillåts falla fritt gäller att dess hastighet *v* meter per sekund strax innan det slår i marken beror på fallhöjden enligt funktionen (tyngdaccelerationen $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$)

$$v = \sqrt{2gh}\,.$$

Med vilken förändringshastighet ändras nedslagshastigheten när fallhöjden ändras vid höjden 10 meter?

LÖSNING:

Märk att $v = (2gh)^{\frac{1}{2}}$.

Vi deriverar funktionen med avseende på *h* och beräknar derivatan för $h = 10\,\text{m}$.

$$v' = \frac{1}{2}(2gh)^{-\frac{1}{2}} \times 2g = \frac{g}{\sqrt{2gh}}$$

$$v'(10) \approx 0{,}70\,\text{(m/s)/m}$$

Svar: När höjden är 10 m ändras nedslagshastigheten med 0,70 (m/s)/m.

EXEMPEL 8:

Ett staket som ska avgränsa ett rektangulärt område ska byggas. Staketmaterial finns för längden *O* meter, vilket således blir staketets omkrets. Hur ska förhållandet mellan områdets höjd och bredd vara, om området ska få så stor area som möjligt? Tolka resultatet.

LÖSNING:

Om bredden på området är *b* (meter) måste höjden vara $h = \dfrac{O - 2b}{2} = \dfrac{O}{2} - b$.

Produkten ger arean *A* (m^2).

$$A(b) = b\left(\frac{O}{2} - b\right) = \frac{bO}{2} - b^2$$

Vi söker nu det *b* för vilket vi erhåller maximala *A*.

$$A'(b) = \frac{O}{2} - 2b$$

Funktionens extremvärden fås (endast) för de b-värden som ger $A'(b) = 0$.

$$\frac{O}{2} - 2b = 0$$

$$2b = \frac{O}{2}$$

$$b = \frac{O}{4}$$

Är $A(b)$ för $b = \frac{O}{4}$ ett maximi- eller minimivärde? Vi undersöker andraderivatan.

$$A''(b) = -2$$

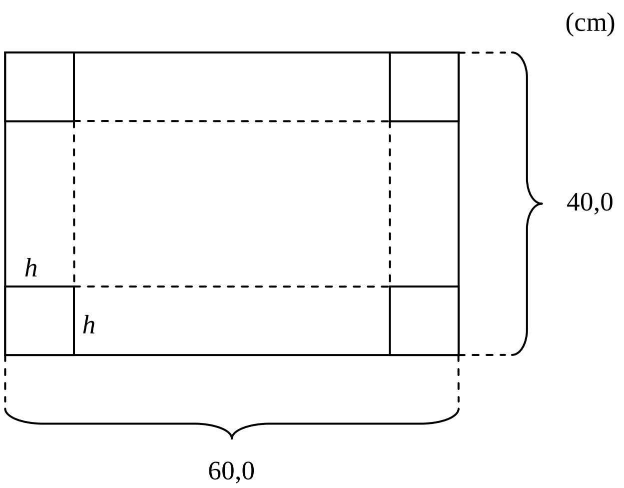
Detta ger att $A''\left(\frac{O}{4}\right) = -2 < 0$ och följaktligen att $A\left(\frac{O}{4}\right)$ är ett maximivärde.

$b = \frac{O}{4}$ ger att $h = \frac{O}{2} - b = \frac{O}{4}$ och att $b = h$.

Svar: Maximal area för området erhålls när det är lika brett som högt, d.v.s. när både bredden och höjden är lika med en fjärdedel av omkretsen. Generellt: av alla rektanglar med samma omkrets, erhålls den största arean för kvadraten.

EXEMPEL 9:

En tekniker behöver en behållare att ha vatten i och tänker tillverka en från en plåtbit som är 60 cm lång och 40 cm bred. Hon tänker skära bort fyra hörnbitar och vika upp de bildade kanterna enligt figuren nedan.



Eftersom materialet är dyrt vill hon endast tillverka en behållare och vill att den ska rymma så mycket vatten som möjligt (minst 8 liter). Vilken höjd h cm ska hon välja så att volymen blir så stor som möjligt? Vilka dimensioner och vilken volym får behållaren då?

LÖSNING:

Lådan får längden $l = 60,0 - 2h$ cm, bredden $b = 40,0 - 2h$ cm samt höjden h cm. Detta ger volymen som en funktion av höjden enligt formeln

$$V(h) = h(60,0 - 2h)(40,0 - 2h) = 4h^3 - 200h^2 + 2400h$$

där V ger volymen i kubikcentimeter.

Vi deriverar volymfunktionen och söker de h-värden som ger $V'(h) = 0$.

$$V'(h) = 12h^2 - 400h + 2400$$

$$12h^2 - 400h + 2400 = 0$$

$$h^2 - \frac{100}{3}h + 200 = 0 \quad \text{vilket satisfieras av}$$

$$h = \frac{50}{3} \pm \sqrt{\frac{(100/3)^2}{4} - 200} = \frac{50}{3} \pm \sqrt{\frac{700}{9}}$$

$$h_1 = \frac{50}{3} + \sqrt{\frac{700}{9}} \approx 25,5\,\text{cm}$$

$$h_2 = \frac{50}{3} - \sqrt{\frac{700}{9}} \approx 7,8\,\text{cm}$$

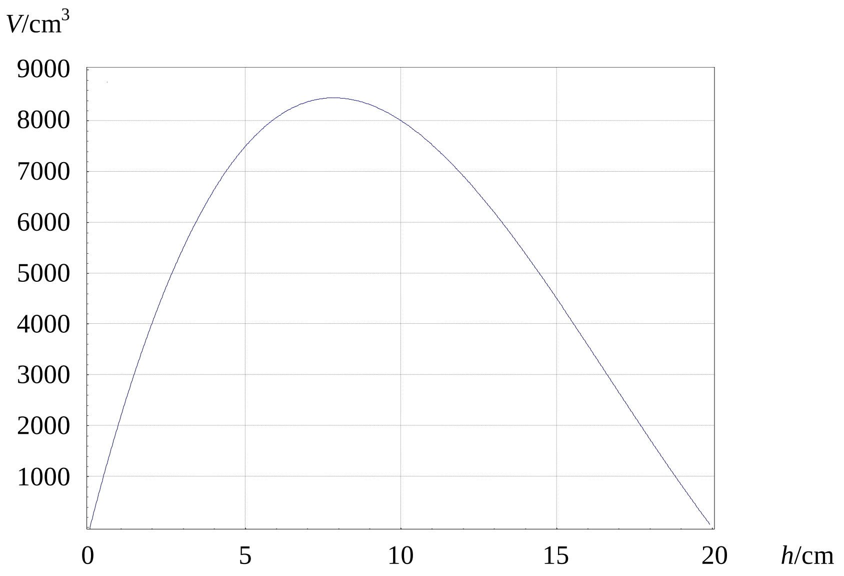
Enligt figuren finns de tillåtna h-värdena i intervallet $0\,\text{cm} < h < 20\,\text{cm}$ (om $h = 20\,\text{cm}$ blir bredden 0 cm). Roten h_1 är således ogiltig. Är $V(h_2)$ ett maximi- eller minimivärde? Vi undersöker andraderivatan.

$$V''(h) = 24h - 400$$

$$V''(h_2) \approx -212 < 0$$

Extremvärdet $V(h_2)$ är följaktligen ett maximivärde. Vi får således den största volymen om höjden är $h_2 \approx 7,8\,\text{cm}$. Detta ger längden $l = 60,0 - 2h \approx 44,3\,\text{cm}$ samt bredden $b = 40,0 - 2h = 24,3\,\text{cm}$. Volymen blir $V(h_2) \approx 8450\,\text{cm}^3 = 8,45\,\text{dm}^3$.

Svar: Behållaren får högst volym om höjden är 7,8 cm. Då blir längden 44,3 cm och bredden 24,3 cm. Den erhållna volymen är 8,45 dm^3. (Behållaren rymmer alltså något mer än kravet på 8 liter.)



Svaret bekräftas av grafen till funktionen $V(h)$.

Sammanfattning

Derivatan till en funktion anger funktionens förändringshastighet och är också en funktion av den oberoende variabeln. Derivatan till funktionen $y = f(x)$ betecknas $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
kx	k
x^a	ax^{a-1}
a^x	$a^x \ln a$
Speciellt: e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
Speciellt (om $a = e$): $\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}$

$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$
$g(x) - h(x)$	$g'(x) - h'(x)$
$g(x) \times h(x)$	$g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$
Speciellt: $C \times g(x)$	$C \times g'(x)$
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$
$g(h(x))$	$g'(h(x)) \times h'(x)$

För kontinuerliga funktioner gäller att punkter där $f'(x) = 0$ antingen är lokala maximum, lokala minimum eller terrassvärden. Om $f''(x) < 0$ i punkten är den ett maximum. Om $f''(x) > 0$ i punkten är den ett minimum. Även förstaderivatans teckenväxling vid punkten kan användas för att avgöra punktens karaktär: + 0 – ger maximum, – 0 + ger minimum och + 0 + eller – 0 – ger ett terrassvärde.

Referenser

Som referenser till vissa avsnitt har följande litteratur använts:

- Ekbom m.fl., *Tabeller och formler för NV-programmet*. Fjärde upplagan. Liber AB. Malmö 1998.
- Brolin, Hans; Björk, Lars-Eric. *Matematik 3000 (Kurs C och D)*. Första upplagan, sjätte tryckningen. Natur och kultur. Falköping 2003.