Vi har alltså ekvationen

$$y(x) = x^3 - ax^2 + 3.$$

Att grafen är konkav i ett intervall definieras som att andraderivatan är negativ (detta betyder för övrigt att grafen ser ut som en konkav lins om man betraktar den underifrån). Eftersom

$$y''(x) = 6x - 2a$$

önskar vi alltså bestämma *a* så att

$$6x - 2a < 0$$

då $x > 4$. Men då

$$6x - 2a < 0 \Leftrightarrow a > 3x$$

är det klart att det inte finns något (ändligt) tal *a* som gör att grafen blir konkav för *alla* $x > 4$, ty för varje (stort) *x* måste *a* vara minst tre gånger så stort för att grafen skall vara konkav i punkten.

Om man vill rita grafen för hand kan man börja med att studera derivatans nollställen för att finna lokala extrempunkter, vilka blir

$$y'^{(x)} = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{3}a\right\}.$$

Eftersom andraderivatan

$$y''(0) = -2a < 0 \text{ då } a > 0$$

och

$$y''\left(\frac{2}{3}a\right) = 2a > 0 \text{ då } a > 0$$

ser vi att funktionen har en lokal maximipunkt $y(0) = 3$ och en lokal minimipunkt $y\left(\frac{2a}{3}\right) = -\frac{4a^3}{27} + 3$. Vidare är det klart att $y(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och att $y(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$.

$$\sin x = 3\cos x\,, \quad x \in \left]0, \pi/2\right[$$

Om vi tittar på definitionen av sinus och cosinus (i enhetscirkeln) ser vi av Pythagoras sats att

$$a^2 + (3a)^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

där $a = \cos x$. Om vi förlänger den ursprungliga ekvationen med $\sin x$ och använder satsen om sinus för dubbla vinkeln ($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$) ser vi att

$$\sin^2 x = 3\sin x\cos x \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sin^2 x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

Eftersom enligt trigonometriska ettan

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

gäller att

$$\sin 2x = \frac{2}{3}(1-\cos^2 x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10} = \frac{3}{5}$$

och problemet är löst.