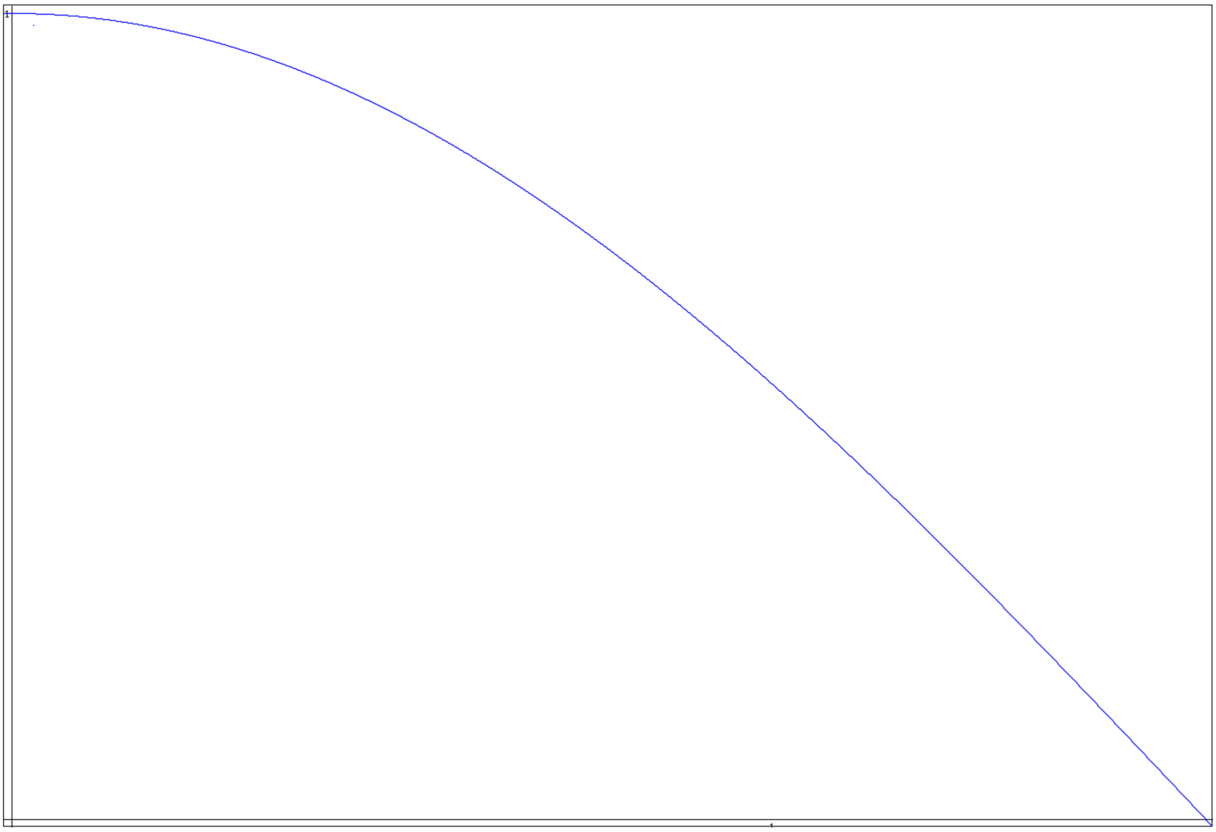
Andreas Rejbrand
http://www.rejbrand.se 2007-05-06

Grafen till funktionen $x \mapsto \cos x$ med definitionsmängden $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ser ut som nedan:



En godtycklig punkt i grafen kan skrivas $(x, \cos x)$, så rektangeln med ett hörn i origo och det motstående hörnet på grafen har arean

$$A(x) = x \cos x.$$

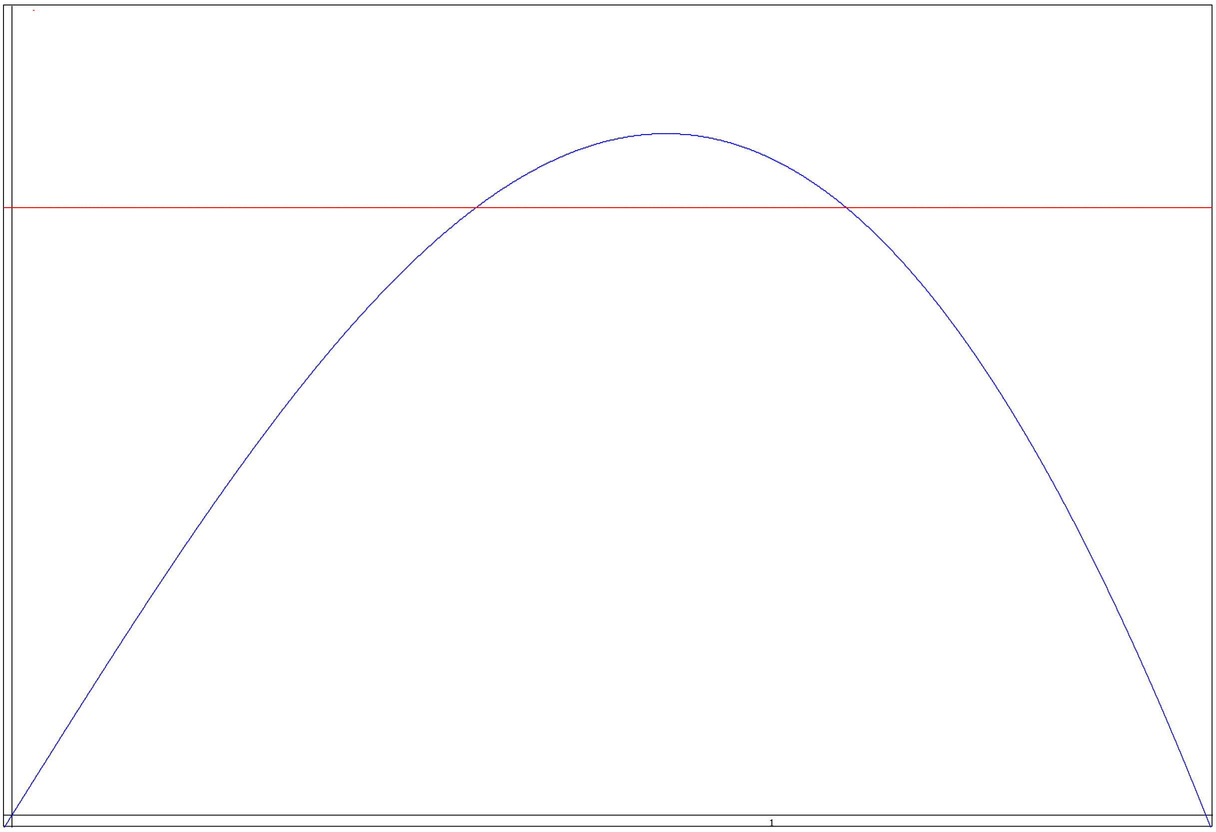
Om

$$A(x) = \frac{1}{2}$$

så måste

$$x \cos x = \frac{1}{2}.$$

Denna ekvation kan lösas numeriskt. Vi ritar först upp areafunktionen A och linjen $A = 1/2$ i *xA*-planet på intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Vi ser att funktionen har två aktuella nollställen på varsin sida om linjen $x = 1$. Med lämplig numerisk lösningsalgoritm på dator (eller räknare) och två lämpliga startvärden erhåller vi

$$x_1 = 0{,}610031284464175975 \ldots \approx 0{,}610$$

samt

$$x_2 = 1{,}09800887679615337 \ldots \approx 1{,}098.$$

För att beräkna rektangelns största möjliga area deriverar vi areafunktionen och sätter derivatan lika med noll, vilket den måste vara i en punkt där funktionen har ett lokalt maximum (se bilden ovan).

$$A(x) = x \cos x \Rightarrow A'(x) = -x \sin x + \cos x$$

$$A'(x) = -x \sin x + \cos x = 0 \tag{1}$$

Det är klart att maximum *inte* inträffar i randpunkten $x = \pi/2$, och vi kan därför förutsätta att $x \neq \pi/2$, vilket innebär att $\cos x \neq 0$ och vi kan dividera både leden i (1) med $\cos x$. Vi erhåller då

$$-x \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \tan x - 1 = 0.$$

Vi sätter nu $g(x) = x \tan x - 1$ och skall således lösa ekvationen

$$g(x) = 0, \quad x \in [0, \pi/2[. \tag{2}$$

I intervallet är såväl funktionen $x \longmapsto x$ som funktionen $x \longmapsto \tan x$ strängt växande, varför hela funktionen *g* måste vara strängt växande. Dessutom är $g(0) = -1$ och $g(x) \to \infty$ då $x \to \pi/2$, så det är klart att ekvation (2) har precis en rot i intervallet. Med en approximativ metod finner vi

$$x = 0{,}860333589019379763\ldots \approx 0{,}860.$$

Det är trivialt att det rör sig om ett maximum (varför?), så den maximala arean blir

$$A(x) = 0{,}561096338191\ldots \approx 0{,}561.$$

$$\int_1^4 \left(3x^{1/2} + a\right)dx = \left[2x^{3/2} + ax\right]_1^4 = 14 + 3a = 26 \Leftrightarrow a = 4$$

Man kan visa att en allmän tredjegradsekvation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

(med $a \neq 0$) har precis tre komplexa rötter (räknat med multiplicitet). Det går att bestämma dessa algebraiskt, men i allmänhet är det krångligt. Det enklaste sättet att bestämma en (enkel) dylik ekvation är oftast att pröva sig fram till en rot, och sedan med polynomdivision erhålla en andragradsekvation (detta tas dock inte upp i Ma D, om jag minns rätt).

Om emellertid $d = 0$ kan ekvationen skrivas

$$x(ax^2 + bx + c) = 0,$$

och en rot är tydligen $x = 0$ medan de (två) övriga erhålles genom lösning av andragradsekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$f(t) = \int_0^t (\cos x - 1/2)dx = [\sin x - x/2]_0^t = \sin t - t/2$$

$$f'(t) = \cos t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

när $t \in]0, 2\pi[$. Eftersom andraderivatan

$$f''(t) = -\sin t$$

är

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

respektive

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

är det klart att ett lokalt maximum erhålles för

$$t = \frac{\pi}{3}$$

medan ett lokalt minimum erhålles då

$$t = \frac{5\pi}{3}.$$

Maximat blir således

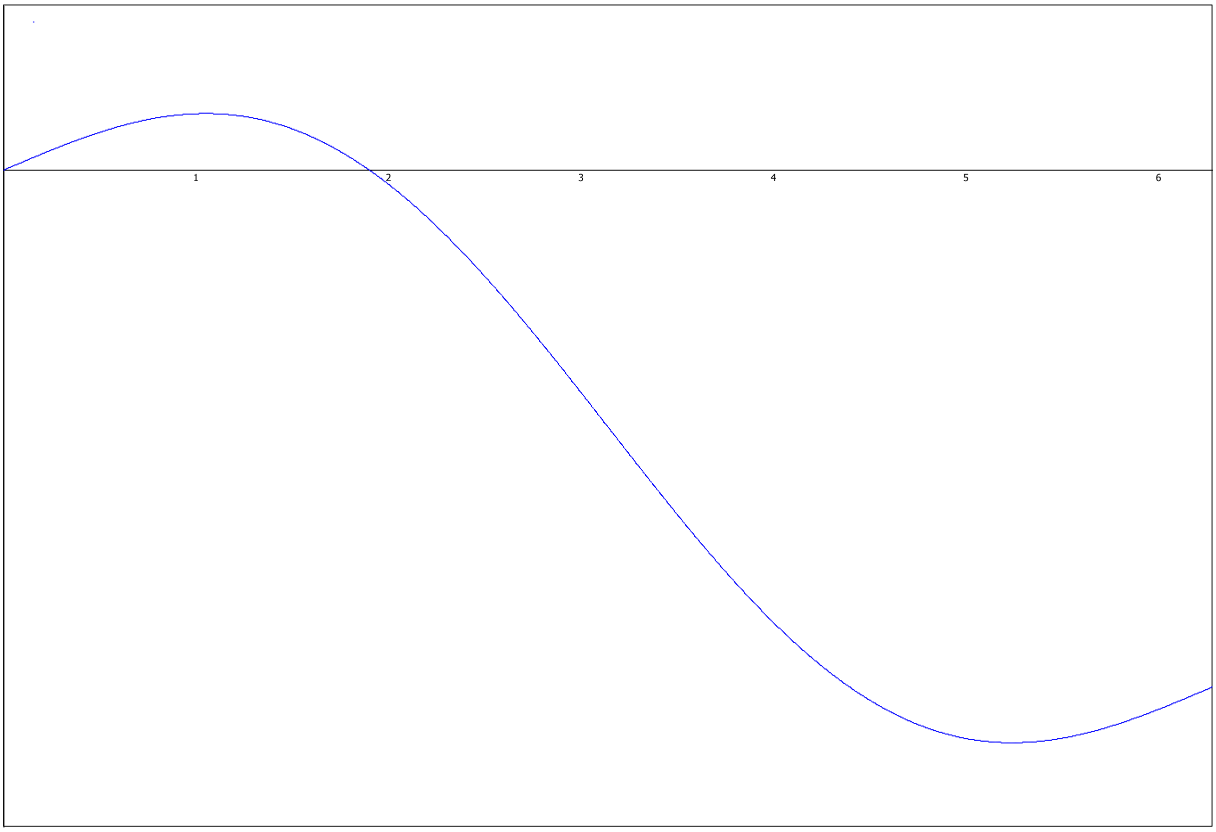
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

och minimat blir

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}.$$

Vidare är gränsvärderna i intervallets randpunkter lika med 0 respektive $-\pi$, och dessa ligger mellan extremvärdena.

Nedan visas grafen till funktionen $t \mapsto f(t)$ på intervallet $]0, 2\pi[$.


1
2
3
4
5
6